

ÚOËVÒÁF

Introdução à Simulação de Reservatórios Petrolíferos

Prof. José Roberto P. Rodrigues
(PETROBRAS/CENPES)

Programa de Verão LNCC – Fevereiro de 2015

Instrutor: José Roberto P. Rodrigues



- Mestre em Matemática pela UFRJ (1987)
- Doutor em Matemática pela UFRJ (1994)
- Profissional da Petrobras desde 1987
- 27 anos de experiência em pesquisa, desenvolvimento e aplicação de metodologias nas áreas de simulação de reservatórios, modelagem de bacias e modelagem matemática de experimentos laboratoriais
- Professor Adjunto do Depto de Análise Matemática do IME/UERJ de 1997 a 2006

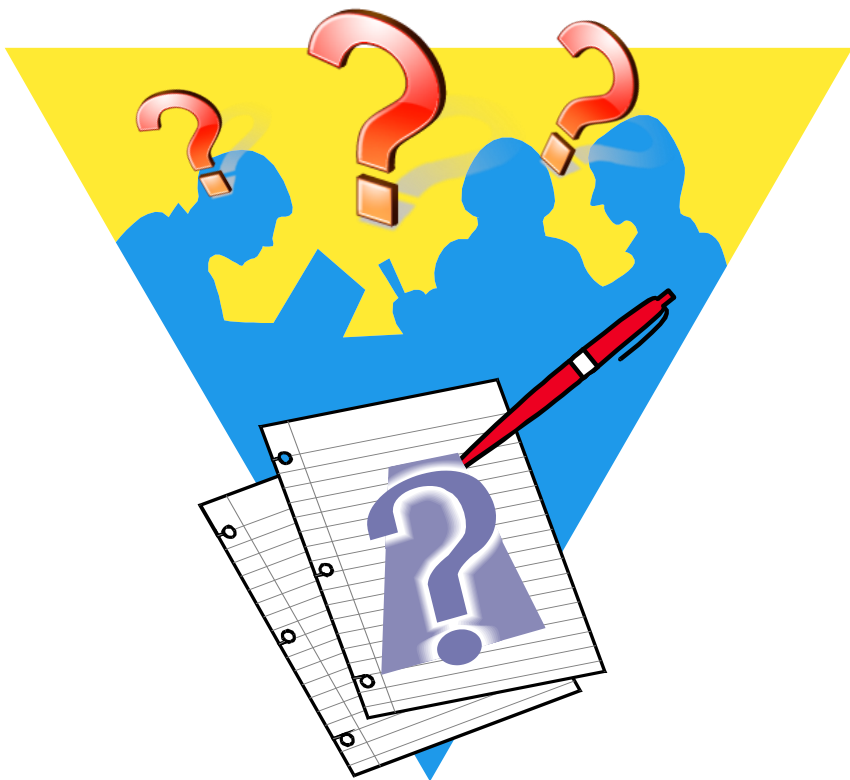
Apresentação

- Nome;
- Formação Acadêmica;
- Atividade Profissional;
- Contato anterior com modelagem matemática e simulação (de reservatórios de petróleo ou em outra área).

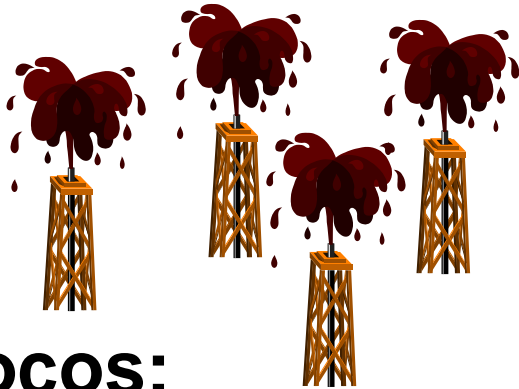
Introdução

- Objetivo: Dar uma visão geral sobre simulação de reservatórios e seus principais conceitos
- Tópicos
 - Motivação: importância da simulação na indústria do petróleo
 - Simulação e Modelos Matemáticos
 - Características relevantes para o desenvolvimento de técnicas numéricas apropriadas
 - Principais Simuladores Disponíveis

Motivação

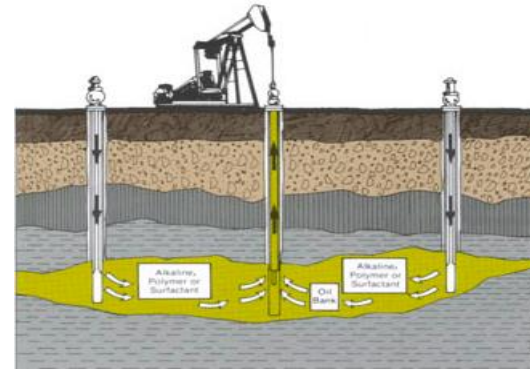


A tomada de decisões para a exploração de um campo de petróleo requer responder uma série de perguntas e comparar diferentes opções



Poços:

- Quantos?
- Onde perfurá-los?
- Verticais, Horizontais ou Multilaterais?



Método de Recuperação:

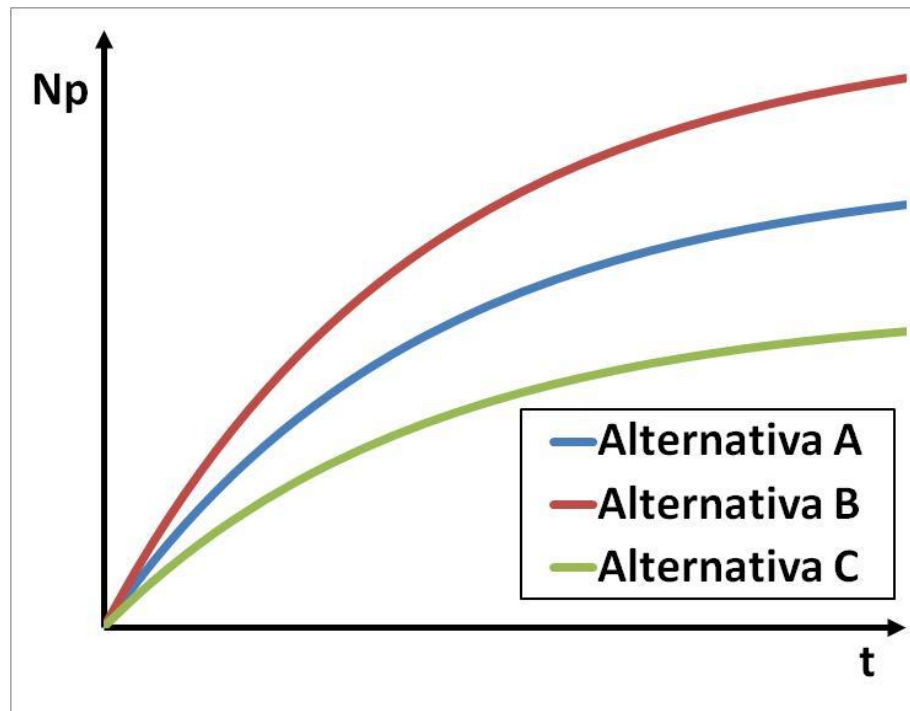
- Depleção Primária?
- Injeção de água ou gás?
- Métodos Térmicos?
- Como controlar os poços? Que vazões usar?

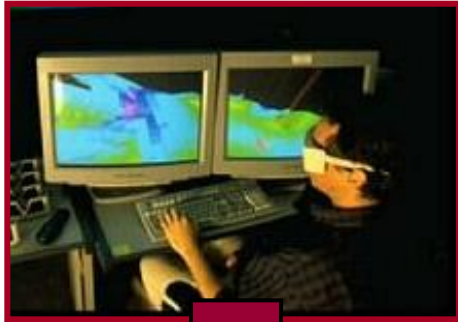


Previsão de Comportamento:

- Recuperação final?
- Fluxo de caixa?
- Reservas?

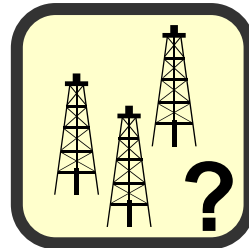
Para decidir quais as melhores estratégias, é necessário reproduzir (simular) qual seria o comportamento do reservatório para as diferentes estratégias.





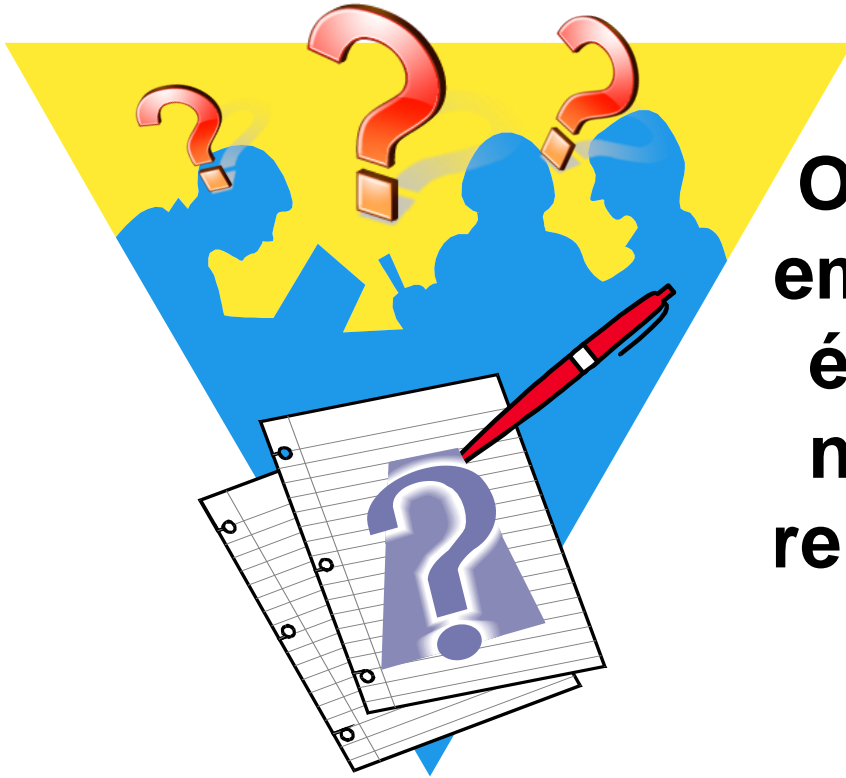
Simulação de reservatórios é uma atividade padrão e essencial na indústria do petróleo:

Toda decisão importante sobre a estratégia de exploração de um campo emprega simulação de reservatórios

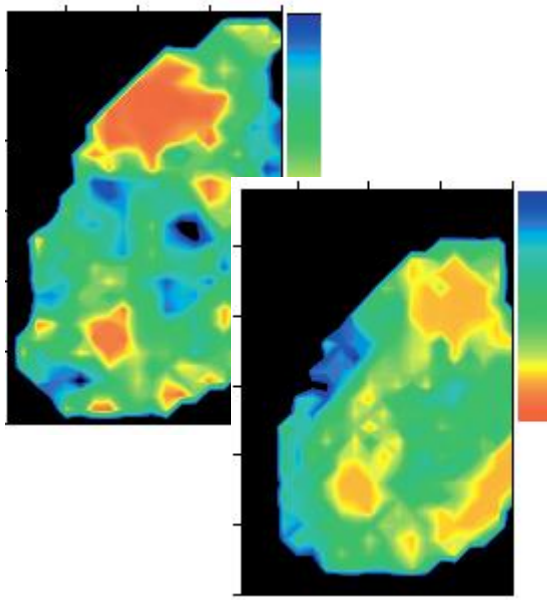


e a qualidade dessas decisões (envolvendo milhões ou bilhões de dólares para cada campo individualmente) depende fortemente de estudos de simulação

Motivação

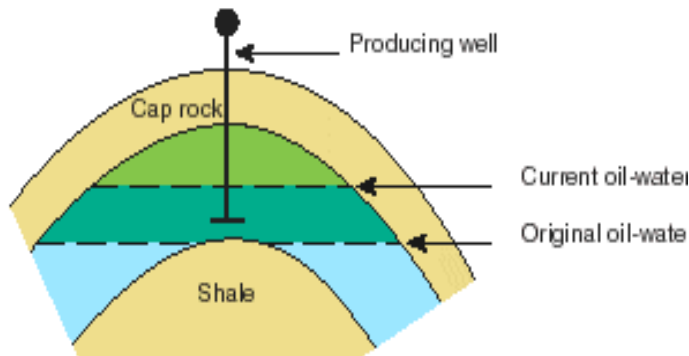


Outro aspecto fundamental em estudos de reservatórios é a presença de incertezas na descrição das variáveis relevantes para as previsões de comportamento.



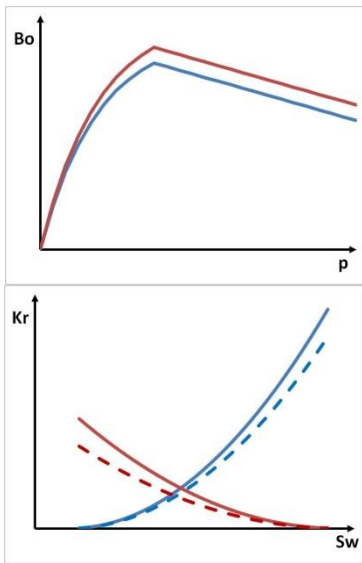
Incertezas Geológicas:

- Geometria externa
- Distribuição espacial de propriedades
- Falhas (localização, rejeito, transmissibilidades)



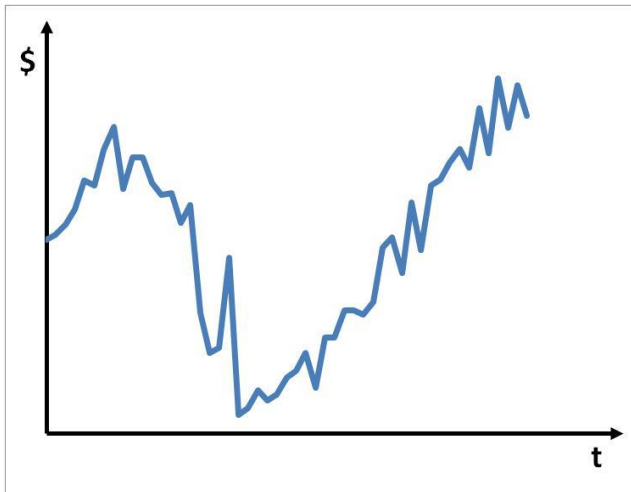
Incertezas na Distribuição Inicial de Fluidos:

- Posição dos contatos água-óleo e gás-óleo
- Saturações residuais de água e óleo



Incertezas nas Propriedades dos Fluidos e Rocha:

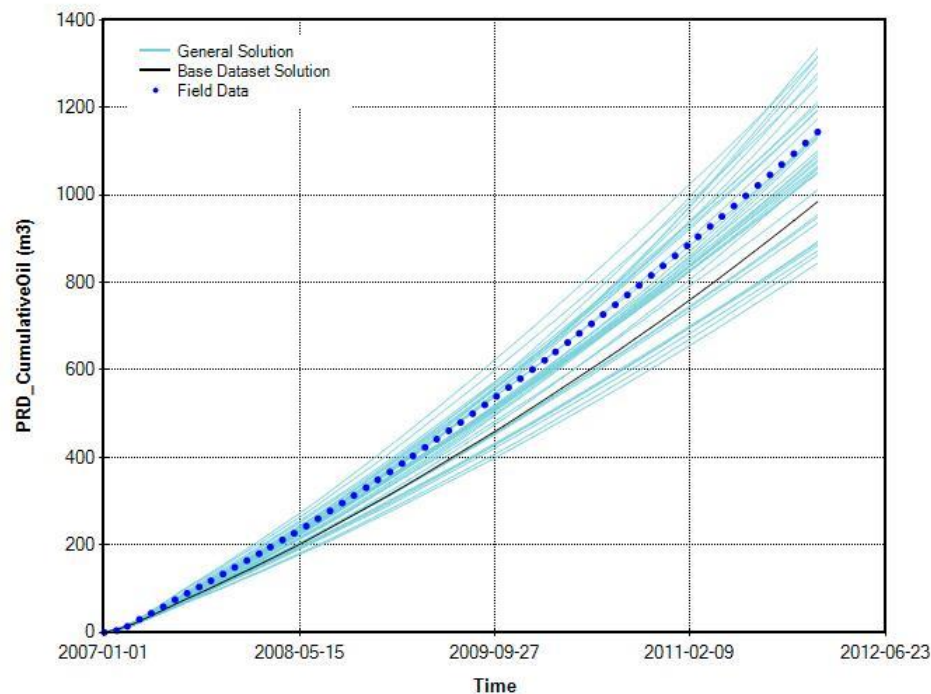
- Compressibilidade
- Viscosidade
- Permeabilidade relativa



Incertezas Econômicas:

- Preço do petróleo

Para tomar decisões de forma robusta em relação às incertezas, é necessário reproduzir (simular) qual seria o comportamento do reservatório para diversos possíveis cenários.



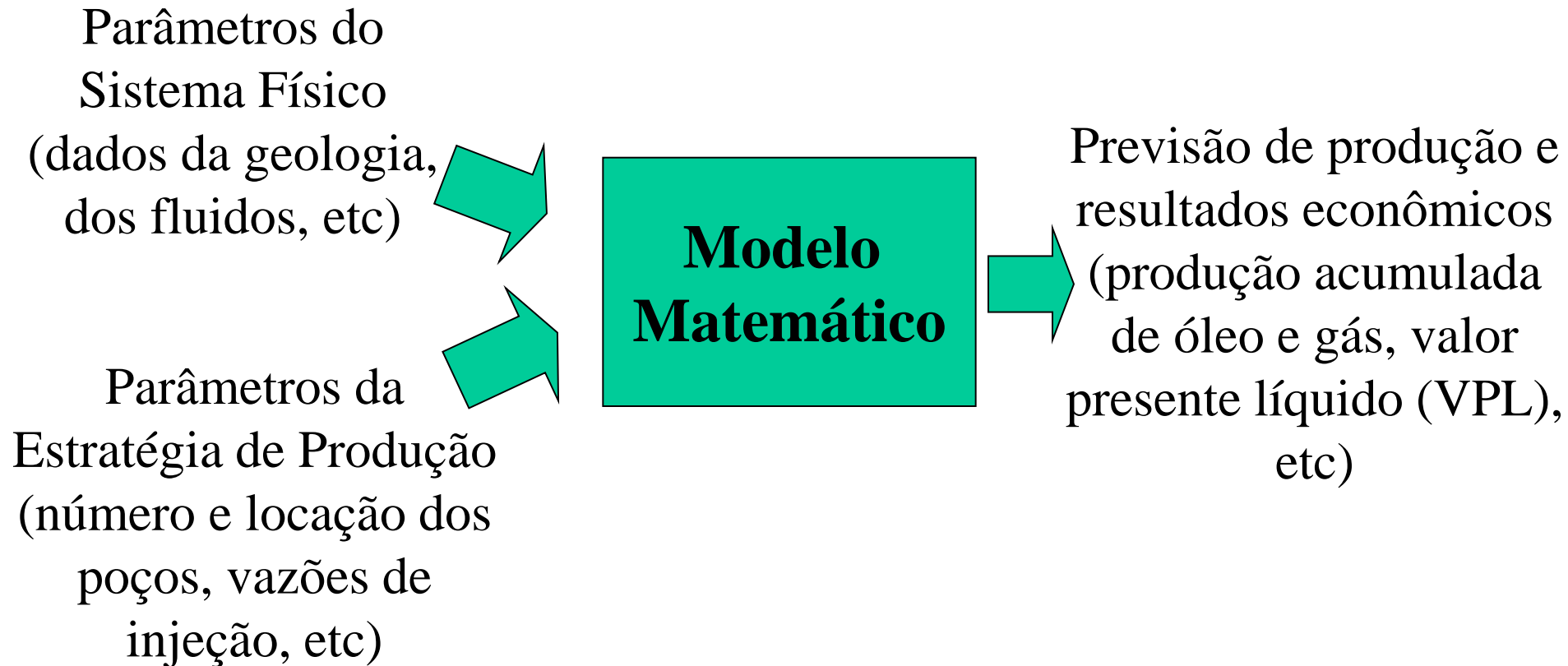
Simulação e Modelos Matemáticos

Segundo o Aurélio:

Simular: 1. ...
2. Representar com semelhança
3.

Simulação: 1. Ato ou efeito de simular
2. ...
3. ...
4. Experiência ou ensaio realizado com auxílio de modelos
5. ...

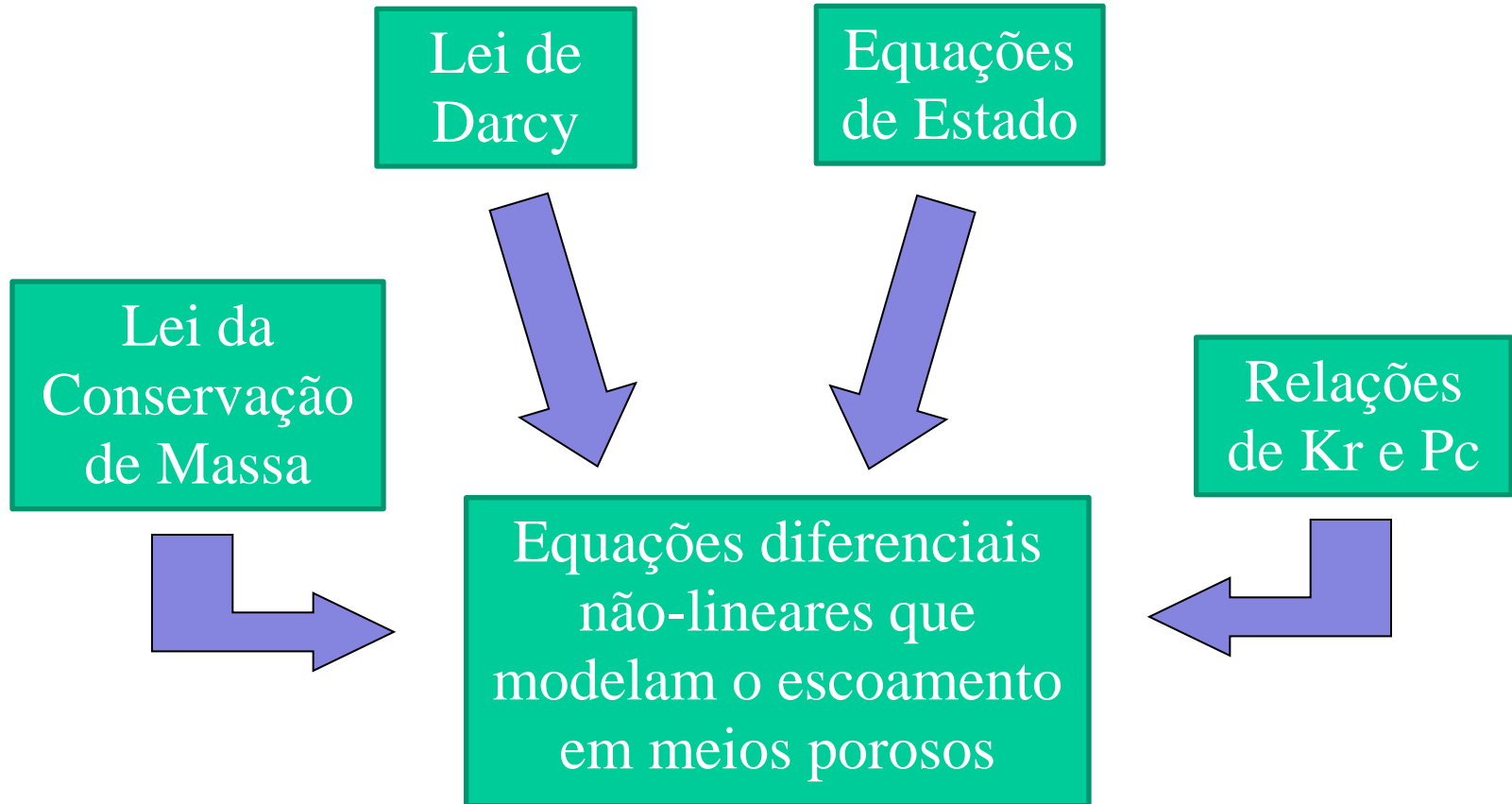
Simulação e Modelos Matemáticos



Simulação e Modelos Matemáticos

- Os parâmetros do sistema físico são determinados pelo problema particular em estudo (reservatório, fluidos, etc), embora conhecidos com grande incerteza;
- Os parâmetros da estratégia de produção são arbitrados pelo profissional encarregado do estudo e representam as variáveis de decisão;
- Os modelos matemáticos mais empregados são baseados em leis físicas básicas (conservação de massa e energia, etc) e relações empíricas verificadas experimentalmente;
- Estes modelos são válidos sob determinadas hipóteses simplificadoras e representam apenas uma “caricatura” do comportamento do sistema físico real.

Simulação e Modelos Matemáticos



Simulação e Modelos Matemáticos

Lei de Darcy

Equações de Estado

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi S_o}{B_o} \right) = \nabla \cdot \left[\frac{kk_{ro}}{B_o \mu_o} (\nabla p_o - \rho_o g \nabla D) \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi S_w}{B_w} \right) = \nabla \cdot \left[\frac{kk_{rw}}{B_w \mu_w} (\nabla p_w - \rho_w g \nabla D) \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\phi \left(\frac{S_g}{B_g} + \frac{S_o R_s}{B_o} \right) \right) = \nabla \cdot \left[\frac{kk_{rg}}{B_g \mu_g} (\nabla p_g - \rho_g g \nabla D) + \frac{R_s kk_{ro}}{B_o \mu_o} (\nabla p_o - \rho_o g \nabla D) \right]$$

em meios porosos

Relações de Kr e Pc

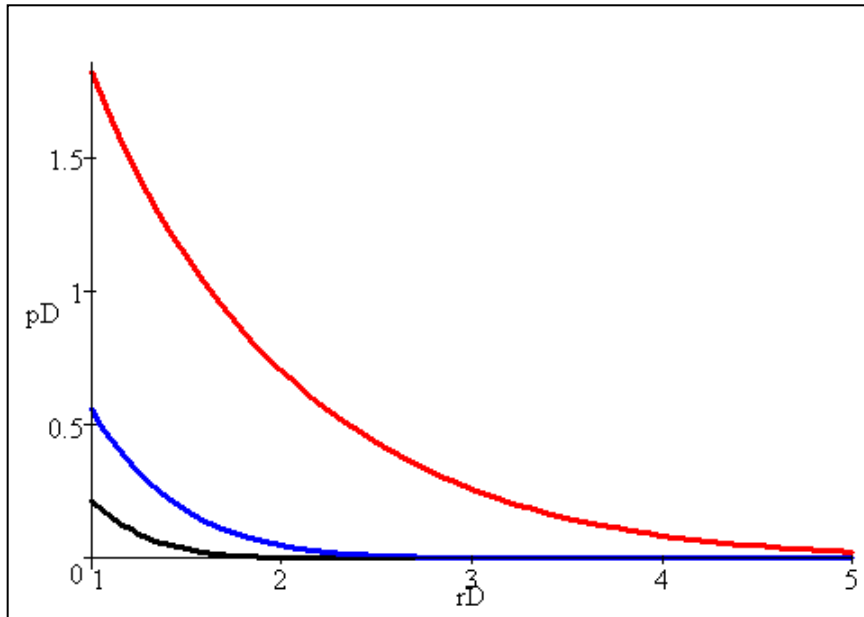
Simulação e Modelos Matemáticos

- As equações diferenciais parciais (EDPs) que modelam o escoamento em meios porosos são extremamente complexas e sua análise e resolução exigem técnicas matemáticas sofisticadas;
- Soluções analíticas envolvem expressões relativamente simples e em geral podem ser calculadas facilmente com auxílio de planilhas ou mesmo calculadoras científicas;
- Soluções numéricas são baseadas no conceito de “discretização” e requerem *software* especializado e recursos computacionais poderosos.

Simulação e Modelos Matemáticos

- Para obter soluções analíticas é necessário impor simplificações ao modelo:
 - Geometria simples (1D, radial, representação simplificada de falhas, etc);
 - Heterogeneidade limitada;
 - Simplificações nos modelos físicos (pequena compressibilidade, interação rocha-fluido limitada, etc).

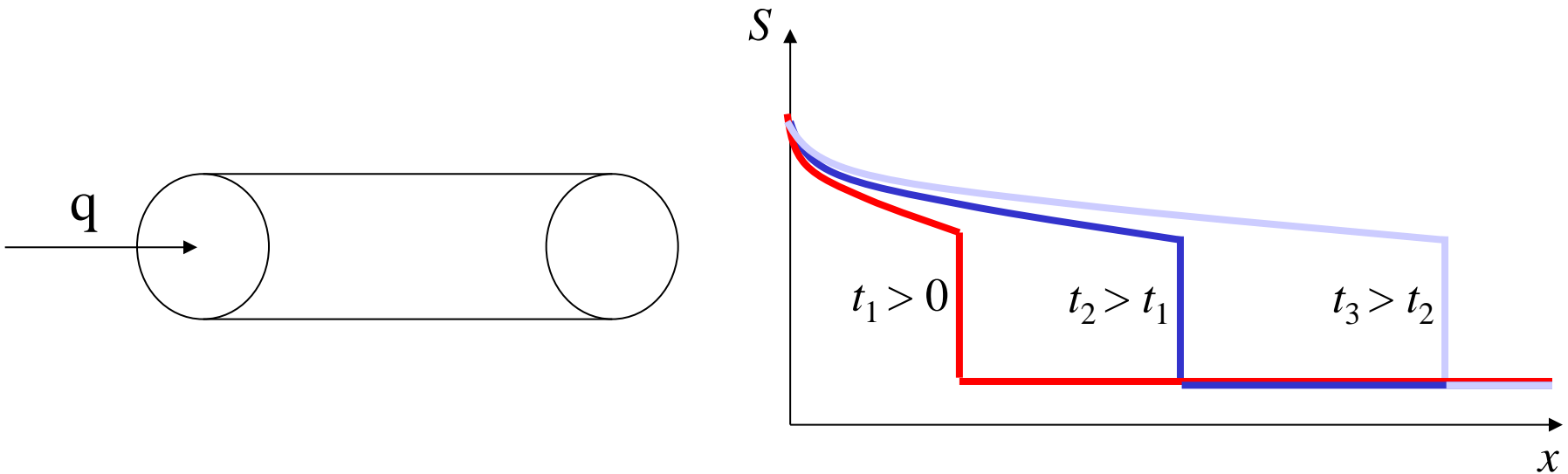
Simulação e Modelos Matemáticos



- Solução da linha fonte:
 - Reservatório homogêneo e isotrópico;
 - Reservatório infinito (raio de investigação elevado);
 - Um único poço produzindo a vazão constante q ;
 - Pressão inicial constante;

$$p_D(r_D, t_D) = -\frac{1}{2} Ei\left(-\frac{r_D^2}{4t_D}\right)$$

Simulação e Modelos Matemáticos



- Problema de Buckley-Leverett:

- Água injetada com vazão constante, deslocando óleo em um meio homogêneo com seção transversal constante e inicialmente preenchido com óleo;
- Efeitos gravitacionais e capilares desprezíveis;
- Fluidos imiscíveis, rocha e fluidos incompressíveis.

Simulação e Modelos Matemáticos

- Apesar de suas simplificações, soluções analíticas são extremamente úteis:
 - Análise de situações específicas (teste de poços, ensaios laboratoriais, etc);
 - Avaliações rápidas;
 - Entendimento qualitativo do comportamento;
 - Validação de soluções numéricas.

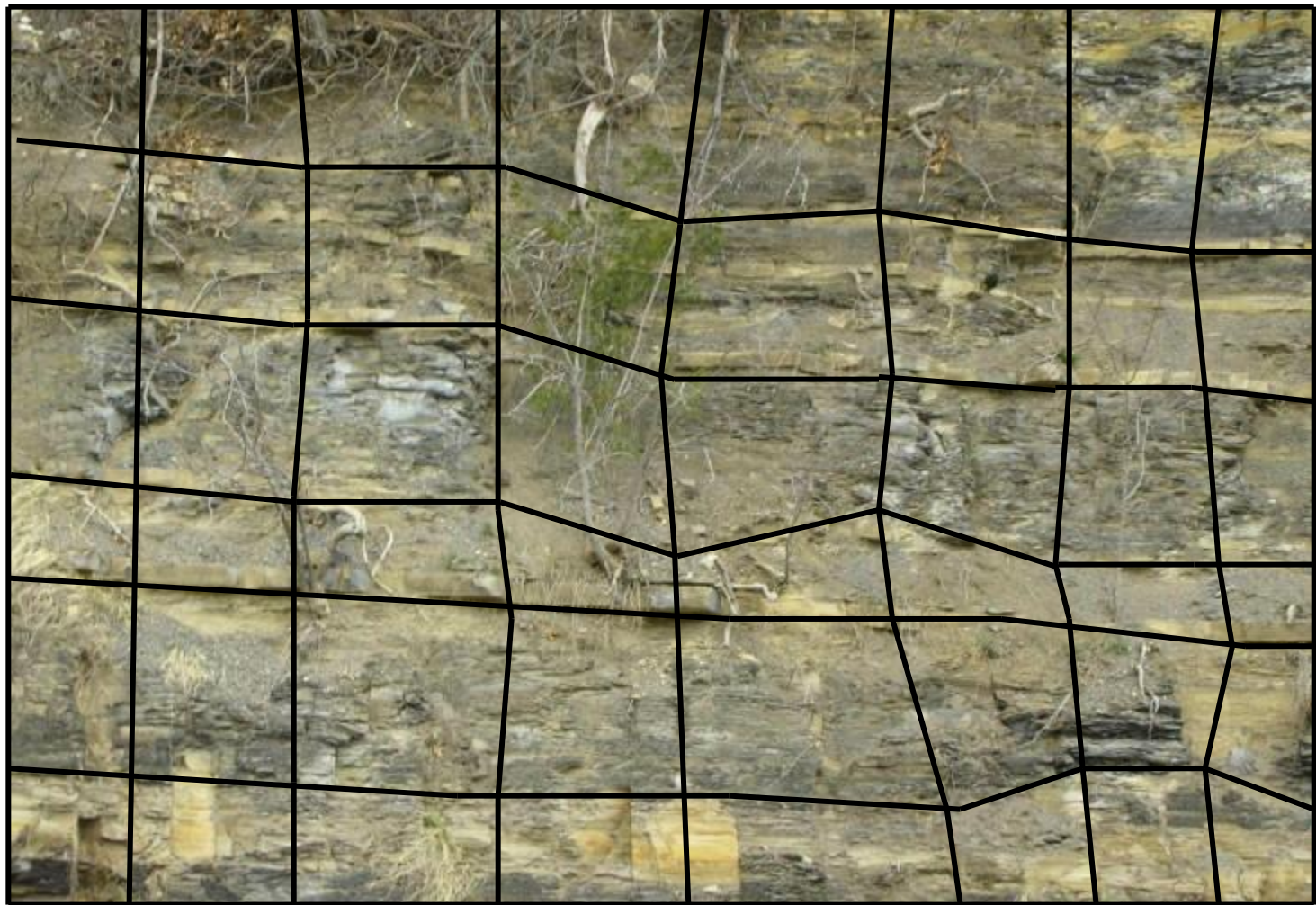
Simulação e Modelos Matemáticos

- Soluções numéricas são baseadas no conceito de discretização:
 - O meio poroso é dividido em “células”;
 - O tempo é dividido em uma sucessão de intervalos (“passos de tempo”);
 - Derivadas são substituídas por diferenças;
 - EDPs de evolução no tempo são transformadas em uma sucessão de problemas algébricos.

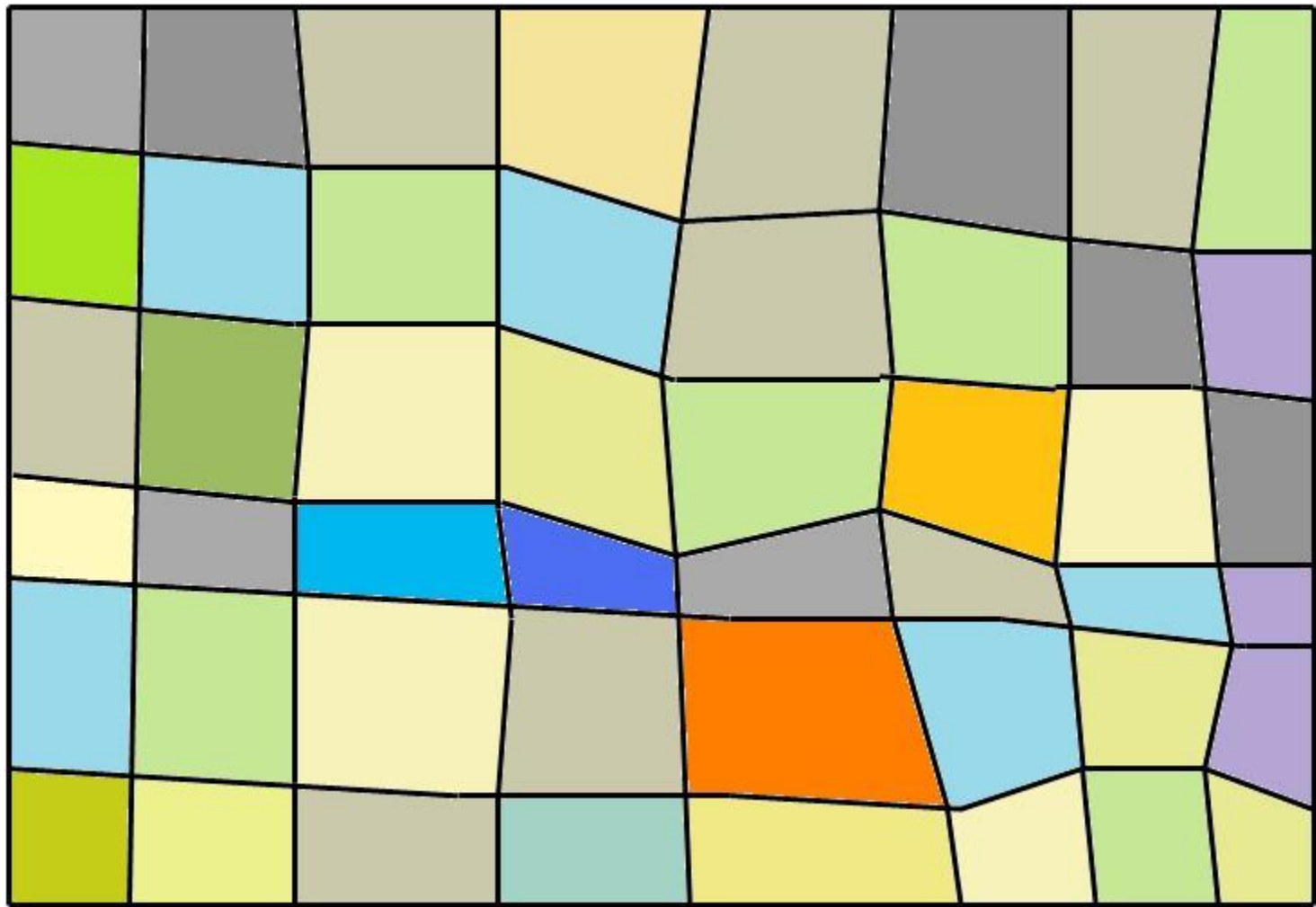


Meio Poroso Real

(Afloramento Fayetteville, fonte: www.copyright-free-images.com)

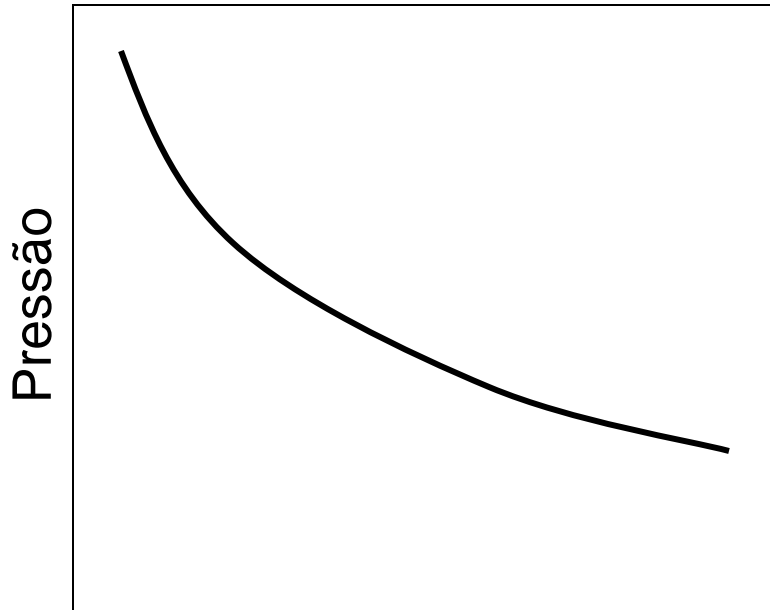


Divisão do Meio Poroso em Células



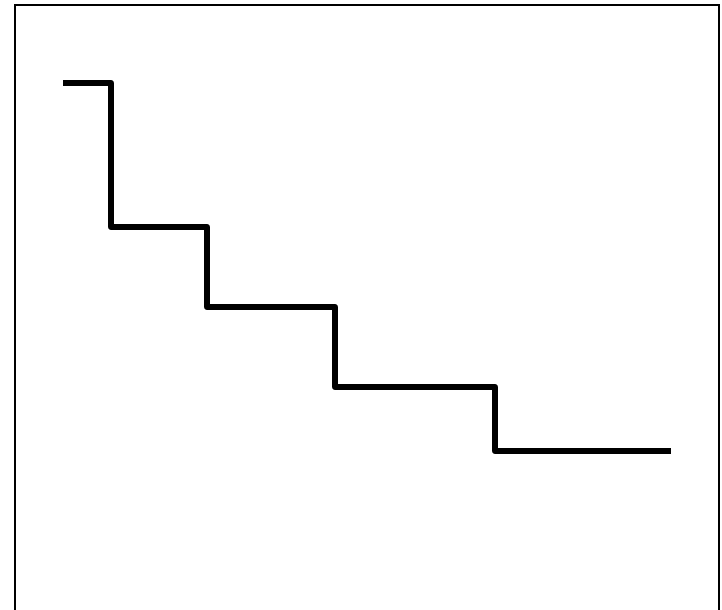
Propriedades Homogêneas em Cada Célula

Divisão do Tempo em Passos de Tempo



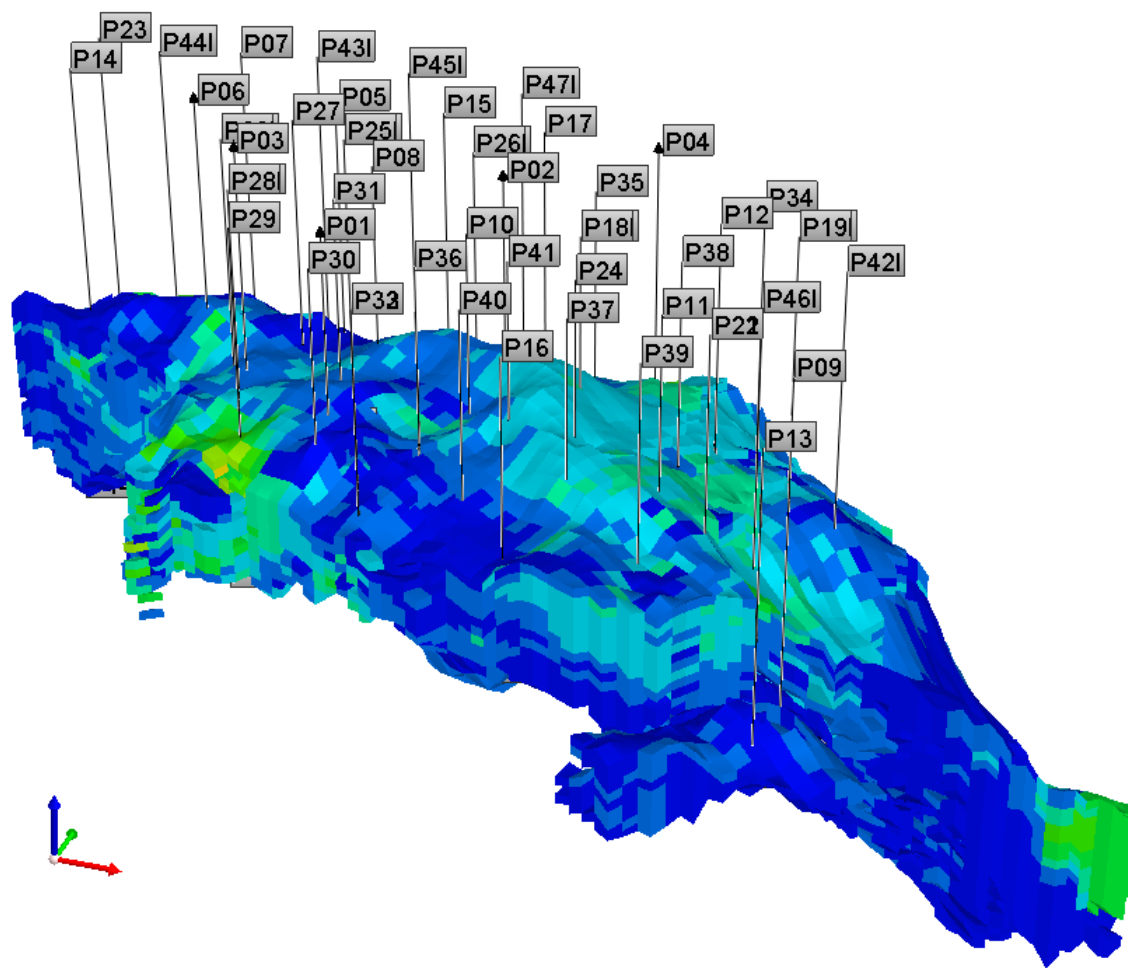
Tempo

Varição de Pressão
com o tempo no
reservatório



Passos de Tempo

Varição de Pressão
com o tempo no
simulador



Apesar de todo detalhamento da discretização e da sofisticação matemática, o modelo de simulação ainda é uma caricatura do reservatório real

Simulação e Modelos Matemáticos

- Características físicas relevantes para o desenvolvimento de técnicas numéricas para simulação de reservatórios:
 - Meio altamente heterogêneo e anisotrópico
 - Geologia complexa com a presença de falhas e pinch-outs (detalhes da geometria externa do domínio são menos relevantes)
 - Processos físicos complexos (escoamento multifásico, multicomponente, interação rocha-fluido, etc)
 - Caráter misto parabólico/hiperbólico
 - Presença de fontes/sumidouros pontuais (poços)

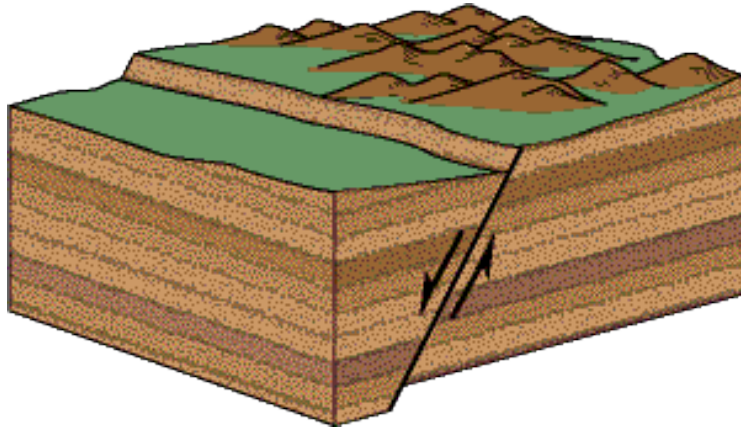


Ilustração de uma falha

Fonte: U.S. Geological Survey
Department of the Interior/USGS
<http://geomaps.wr.usgs.gov/parks/deform/gfaults.html>
(visitado em 8/1/2015)

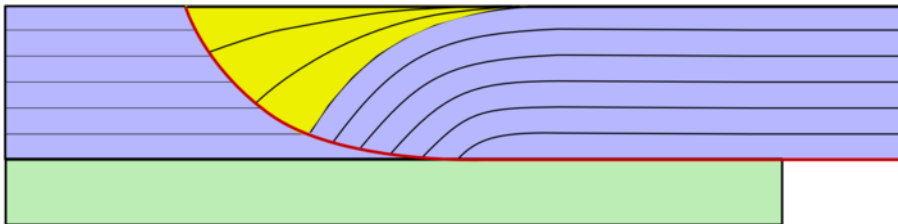


Ilustração de um pinch-out

Fonte
<http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Rollover.png>
Autor: Mikenorton
(visitado em 8/1/2015)

Simulação e Modelos Matemáticos

- Outras características relevantes para o desenvolvimento de técnicas numéricas para simulação de reservatórios:
 - Dimensão das malhas de simulação e necessidade de utilização de HPC
 - Existência de software sofisticado e de grande investimento
 - Grande ênfase em robustez e eficiência, menor interesse na precisão e acurácia

Simuladores Disponíveis

- Programas de simulação de reservatórios começaram a ser utilizados na década de 50 basicamente em grandes empresas de petróleo utilizando *mainframes*
- A partir da década de 80, *software-houses* independentes começaram a oferecer simuladores comerciais
 - Maior disponibilidade de *desktops* potentes

Simuladores Disponíveis

- Dada a grande complexidade envolvida no desenvolvimento de um programa de simulação de reservatórios, a maioria das empresas operadoras utilizam simuladores comerciais
 - Algumas empresas possuem simuladores próprios (exs.: Exxon, Shell, Saudi Aramco)
 - Algumas universidades e centros de pesquisa mantêm simuladores com finalidade acadêmica e de pesquisa (exs.: Stanford, UT, Sintef)

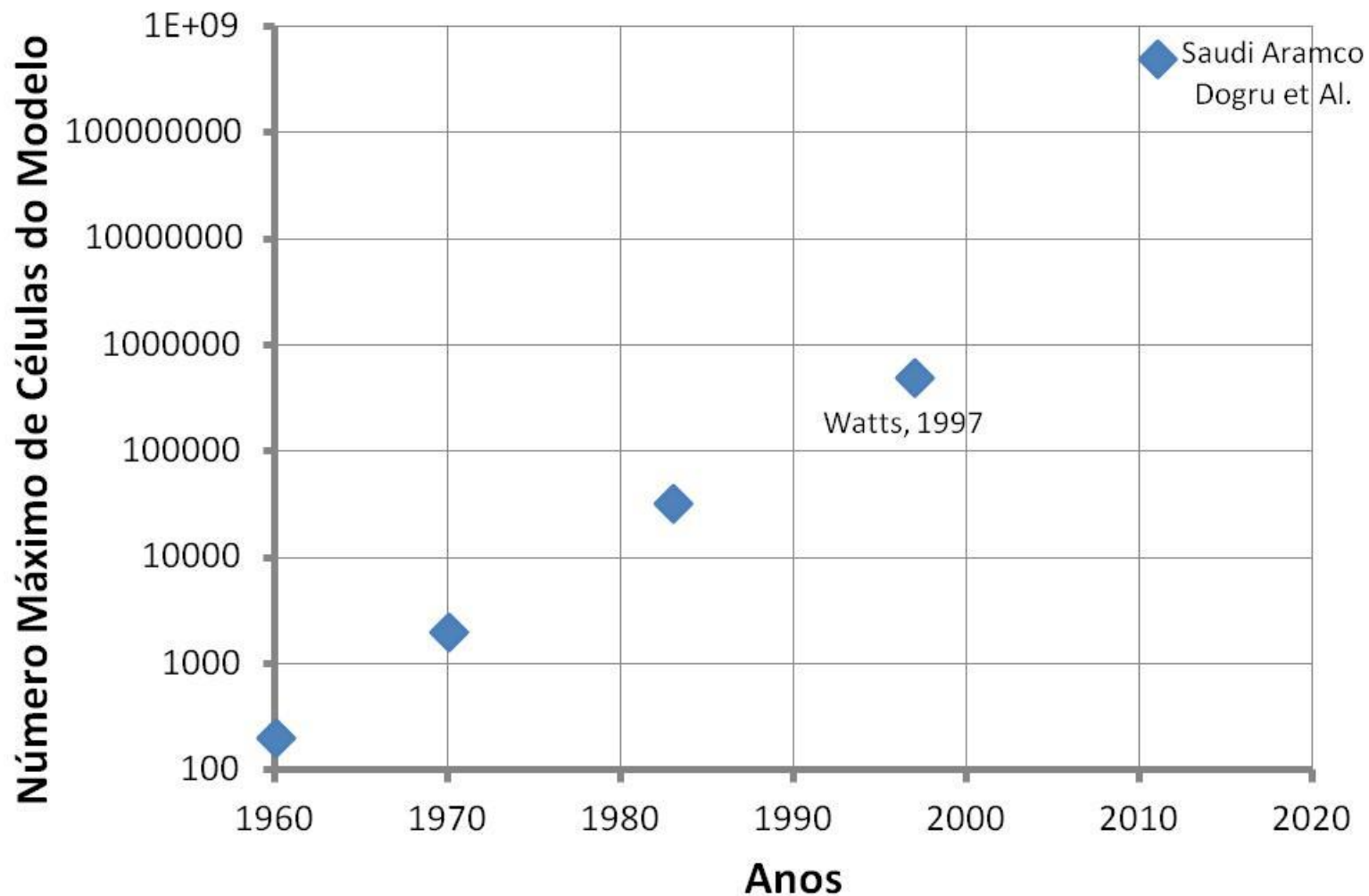
Simuladores Disponíveis

- Simuladores comerciais são ferramentas caras e sofisticadas aperfeiçoadas durante duas décadas de pesquisa e desenvolvimento
 - Diversas opções de modelagem
 - *Black-oil*, composicional, térmico, etc
 - Geometria complexa
 - Interfaces gráficas para entrada e saída de resultados (gráficos, visualização 3D, etc)

Simuladores Disponíveis

- Simuladores comerciais são ferramentas caras e sofisticadas aperfeiçoadas durante duas décadas de pesquisa e desenvolvimento (cont.)
 - Métodos numéricos avançados para máximo desempenho computacional
 - Adaptados às modernas arquiteturas computacionais (processamento paralelo)

Tamanho Máximo das Malhas de Simulação ao Longo do Tempo



Simuladores Disponíveis

- Principais simuladores comerciais:
 - Eclipse (Schlumberger)
 - Imex, Gem, Stars (CMG)
 - Nexus (Landmark)

Simuladores de Nova Geração

- Os simuladores atuais foram desenvolvidos em torno de 20 anos atrás
 - Novas demandas
 - Avanços em *hardware* e *software*
- Associações entre operadoras e *software-houses* para o desenvolvimento de ferramentas completamente novas:
 - Nexus (BP + Landmark)
 - Intersect (Chevron + Schlumberger)
 - DRMS (Petrobras + Shell + CMG)

Simuladores de Nova Geração

- Diferenciais:
 - Modelagem integrada (Reservatórios + EE)
 - Simulação multipropósito
 - Flexibilidade e extensibilidade
 - *Workflows* automatizados
 - Rastreabilidade de estudos
 - Eficiência computacional
- As novas ferramentas deverão gradualmente substituir as antigas ao longo da próxima década

Parte I: Introdução – Resumo

- Simulação de reservatórios permite reproduzir (com certo grau de precisão) o comportamento de reservatórios de petróleo submetidos a diferentes estratégias de produção
- É a principal ferramenta utilizada na tomada de decisões na engenharia de reservatórios

Parte I: Introdução – Resumo

- Simulação de reservatórios é baseada em modelos matemáticos sofisticados (sistemas de EDP's) obtidos a partir de princípios físicos básicos (conservação de massa e energia) combinados com leis constitutivas empíricas
- Soluções analíticas, embora úteis, são limitadas a situações relativamente simples
- Soluções numéricas são baseadas no conceito de discretização (espacial e temporal)

Parte I: Introdução – Resumo

- Técnicas numéricas para simulação de reservatórios devem levar em conta a presença de meio heterogêneo e anisotrópico, geologia e processos físicos complexos, caráter das EDPs e a presença de fontes pontuais
- Também é preciso considerar a necessidade de utilização de HPC, a grande base de software já existente e a ênfase em robustez e eficiência

Parte I: Introdução – Resumo

- Simuladores de reservatório modernos são ferramentas computacionais caras e sofisticadas que requerem recursos computacionais adequados
- Os simuladores comerciais são os mais utilizados no cotidiano da indústria
- A sofisticação dos modelos e o número de células utilizado cresceu exponencialmente ao longo das últimas décadas

Objetivos do Curso

- Descrever as principais técnicas matemáticas e numéricas empregadas nos simuladores de reservatórios utilizados na indústria
- Ênfase na fundamentação matemática dessas técnicas e nos aspectos distintivos de outras áreas de aplicação
- Apresentar algumas questões em discussão na literatura da área (“literatura SPE”)

Objetivos do Curso

- Descrever as principais técnicas **matemáticas e numéricas** empregadas nos **simuladores** de reservatórios utilizados na **indústria**
- Ênfase na **fundamentação matemática** dessas técnicas e nos aspectos **distintivos** de outras áreas de aplicação
- Apresentar **algumas questões** em discussão na **literatura da área** (“literatura SPE”)

Objetivos do Curso

- O que este curso **não** é:
 - Um curso prático sobre o uso de ferramentas de simulação
 - Não serão apresentados os fluxos de trabalho característicos de estudos de reservatório empregando simulação (curso mais voltado “para desenvolvedor/pesquisador” do que “para usuário”)
 - Uma apresentação completa dos modelos físicos sofisticados presentes nos simuladores
 - Limitado a problemas monofásicos e bifásicos
 - Discussão superficial de métodos de solução

Objetivos do Curso

- Não é esperado conhecimento prévio de simulação de reservatórios ou modelagem de escoamento em meios porosos
- Não é esperado conhecimento prévio de métodos numéricos para EDP's (embora possa ser útil em alguns momentos)
- Curso introdutório acessível até para alunos de graduação com sólida base em cálculo e álgebra linear (embora alguns tópicos não sejam exatamente “elementares”)

Programa do Curso

- Primeiro dia
 - Introdução/Motivação (este conjunto de slides)
 - Escamento monofásico
 - Formulação Matemática: conceitos básicos de meios porosos (porosidade, permeabilidade e a lei de Darcy). Lei de conservação de massa e as EDP's que modelam o escoamento em meios porosos
 - Formulação Numérica: discretização em Volumes Finitos para fluido incompressível. Monotonicidade e Convergência

Programa do Curso

- Segundo dia
 - Escamento monofásico (cont.)
 - Formulação Numérica: discretização em Volumes Finitos para fluido incompressível. Monotonicidade e Convergência. Introdução a malhas não estruturadas e métodos de múltiplos pontos.

Programa do Curso

- Terceiro dia
 - Escamento monofásico (cont.)
 - Tratamento de poços. Fluido compressível e discretização temporal. Breve descrição dos principais métodos de solução.
 - Escamento bifásico
 - Formulação Matemática: conceitos básicos de escoamento bifásico em meios porosos (saturação, pressão capilar e permeabilidade relativa). Natureza das EDP's que modelam o escoamento bifásico em meios porosos. Problema de Buckley-Leverett e comportamento das soluções.

Programa do Curso

- Quarto dia
 - Escamento bifásico (cont.)
 - Formulação Numérica: discretização a montante para problemas convectivos. Estabilidade e a condição de CFL. Difusão numérica. Métodos IMPES, Totalmente Implícito e Adaptativo Implícito. Breve descrição dos principais métodos de solução.

Programa do Curso

- Aulas expositivas com uso de slides
 - Não haverá exercícios ou laboratório
 - A participação é incentivada através de perguntas, etc.
- Cada dia dividido em duas aulas (em torno de 1:20 h cada uma) e um intervalo (em torno de 20 min)

Agradecimentos

- À comissão organizadora do Programa de Verão do LNCC, especialmente à Profa. Sandra Malta, pelo convite
- À Petrobras pela permissão e incentivo à participação e pelas oportunidades de desenvolvimento profissional ao longo da minha carreira

UNIVERSIDADE

Introdução à Simulação de Reservatórios Petrolíferos

Prof. José Roberto P. Rodrigues
(PETROBRAS/CENPES)

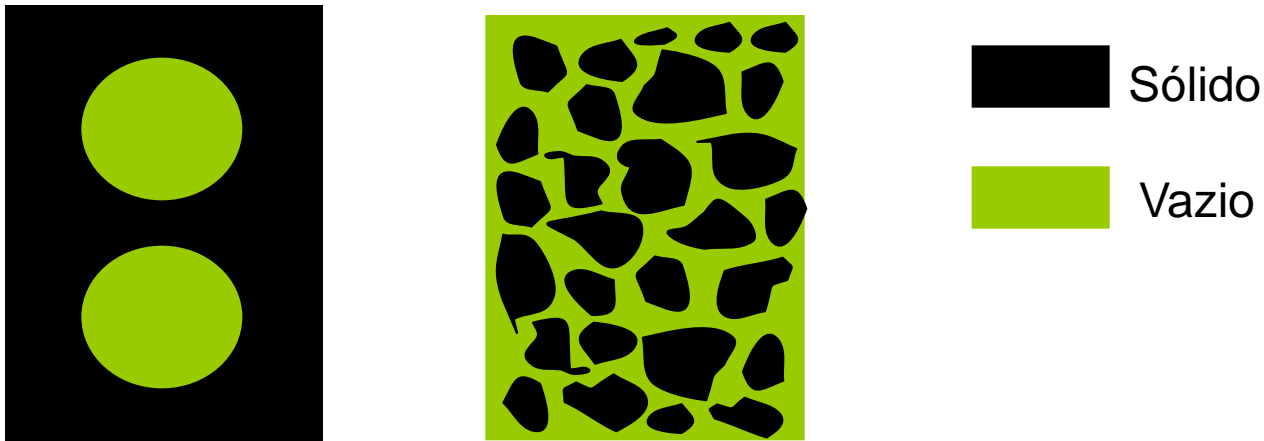
Programa de Verão LNCC – Fevereiro de 2015

Escoamento Monofásico – Formulação Matemática

- Tópicos
 - Conceitos básicos de meios porosos
 - Porosidade
 - Permeabilidade e a Lei de Darcy
 - Dedução da equação para escoamento monofásico em meios porosos
 - Análise de alguns casos especiais
 - Fluido e rocha pouco compressíveis
 - Fluido e rocha incompressíveis

Meio Poroso: Conceitos Básicos

- Definição genérica: sólido com espaços vazios



- Embora os dois meios acima se enquadrem nesta definição grosseira, estamos interessados em meios como o da direita

Meio Poroso: Conceitos Básicos

- Hipóteses adicionais de homogeneidade e escala são necessárias para distinguir o que iremos considerar meio poroso:
 - ✓ Tamanho dos poros pequeno em relação ao tamanho da amostra
 - ✓ Distribuição relativamente homogênea dos poros na amostra
- Exemplos: rochas, solos, areias, tecidos fibrosos, madeira, cerâmica

Meio Poroso: Conceitos Básicos

- Reservatórios de petróleo são meios porosos naturais constituídos por rochas sedimentares onde se encontram hidrocarbonetos em estado líquido ou gasoso
- Estamos interessados nas propriedades dos meios porosos relevantes para a modelagem do escoamento de fluidos
- Propriedades macroscópicas relevantes:
 - ✓ Porosidade: fração volumétrica do espaço vazio
 - ✓ Permeabilidade: capacidade do meio de deixar o fluido escoar

Porosidade

- Porosidade: fração do volume total ocupada por poros ou espaço vazio

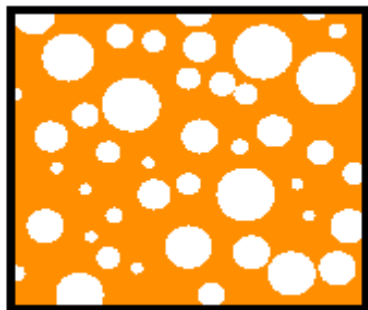
$$\phi = \frac{V_P}{V_T} = 1 - \frac{V_S}{V_T}$$

V_P = volume de poros

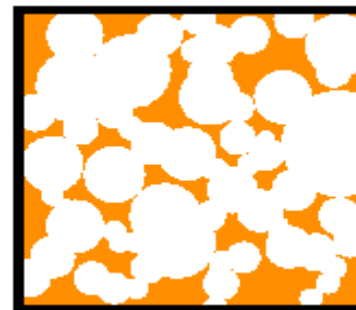
V_S = volume de sólido

V_T = volume total

- Nos interessa apenas a porosidade efetiva, isto é, considerando apenas o volume de poros conectados



Poros Isolados
(porosidade efetiva nula)



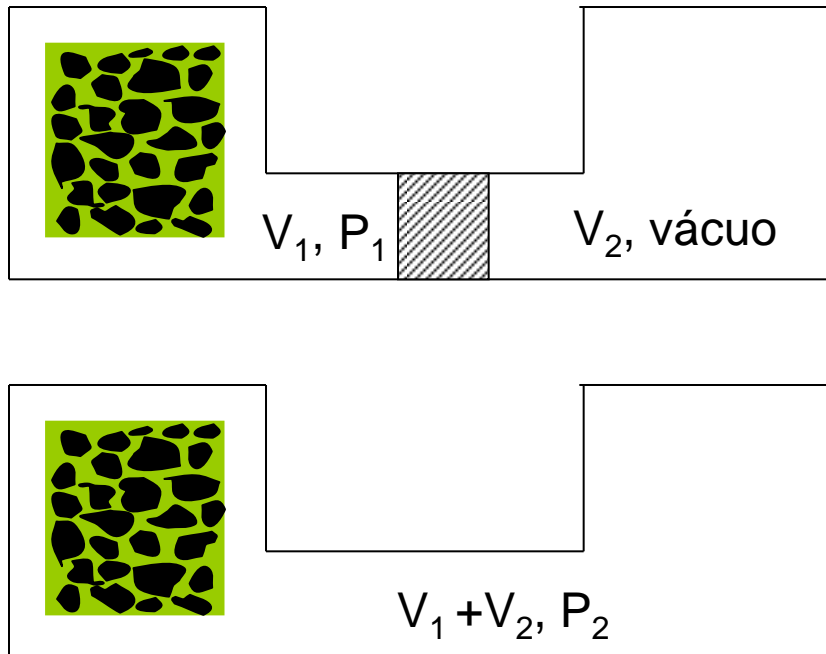
Poros Conectados

Porosidade

- A porosidade é determinada através de experimentos em laboratório
- Vários métodos, entre eles:
 - ✓ Por embebição com um fluido de densidade conhecida. A diferença de peso antes e depois do fluido preencher o meio permite calcular a porosidade
 - ✓ Expansão gasosa
- Valores típicos em reservatórios de petróleo se situam na faixa de 0,15 a 0,25

Porosidade

Método de Expansão Gasosa para Determinação de Porosidade



Para gás ideal

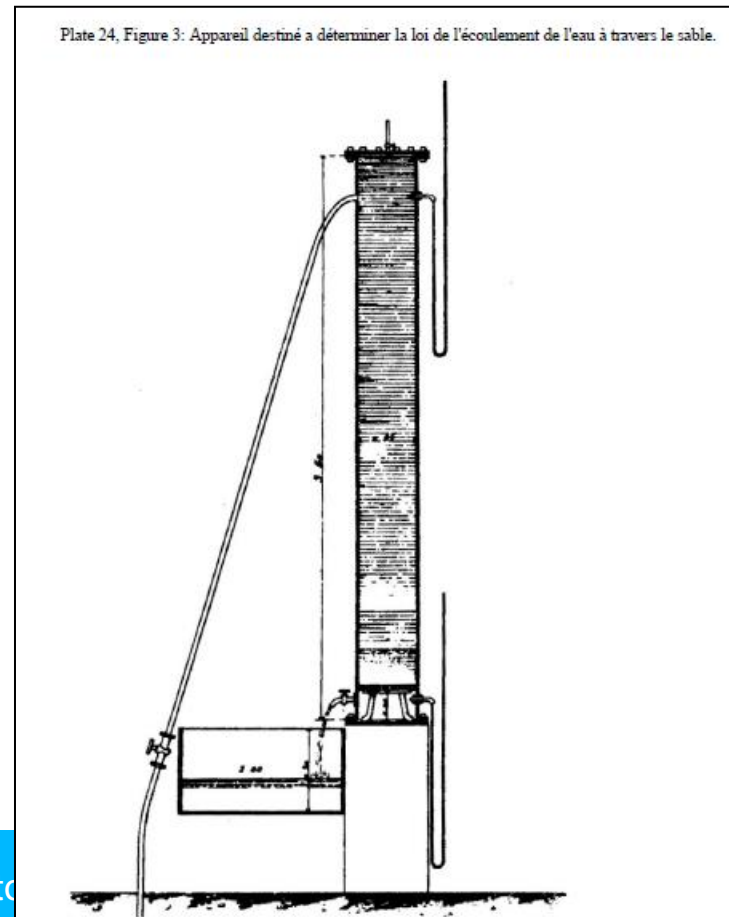
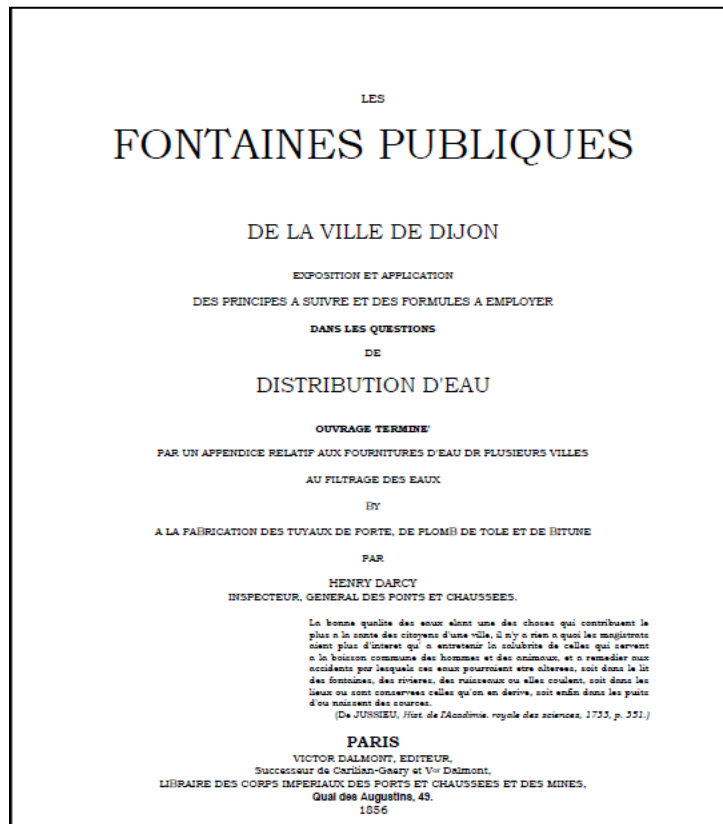
$$P_1(V_1 - V_S) = P_2(V_1 + V_2 - V_S)$$

⇓

$$V_S = V_1 - \frac{P_2}{P_1 - P_2} V_2$$

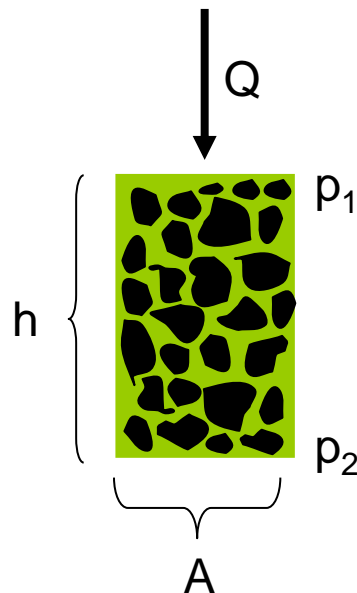
Permeabilidade e Lei de Darcy

- A permeabilidade está relacionada à capacidade do meio de permitir o escoamento de fluidos
- A definição de permeabilidade é baseada no experimento de Darcy (1856)



Permeabilidade e Lei de Darcy

- A vazão de um fluido incompressível escoando através de um meio poroso é proporcional à diferença de potencial e à área exposta ao fluido e inversamente proporcional ao comprimento



$$Q = \alpha \frac{A(p_1 - p_2 + \rho gh)}{h}$$

ρ = densidade do fluido

Permeabilidade e Lei de Darcy

- A constante de proporcionalidade depende do meio e do fluido

$$\alpha = \frac{k}{\mu}$$

onde μ é a viscosidade do fluido e k é uma constante que só depende do meio, denominada de permeabilidade (específica)

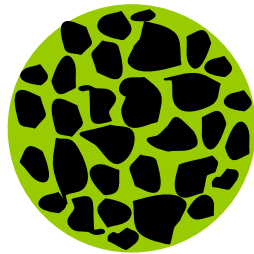
- Daí,

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{k}{\mu} \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{h}$$

$$\Phi = p + \rho g z = \text{potencial do fluido}$$

Permeabilidade e Lei de Darcy

- v é uma velocidade “fictícia” diferente da velocidade real do fluido, uma vez que considera a área total tanto vazios (por onde o fluido escoar, em verde na figura abaixo) como sólidos



A_v = área de vazios

A = área total

$$Q = Av = A_v v_{\text{fluido}} \Rightarrow v_{\text{fluido}} = \frac{A}{A_v} v$$

$$v_{\text{fluido}} = \frac{v}{\phi}$$

- v é a velocidade superficial ou de Darcy

Permeabilidade e Lei de Darcy

- Análise dimensional para a permeabilidade:

$$k = \frac{v\mu L}{\Delta\Phi} = \frac{\frac{[L]}{[T]} \frac{[M]}{[L][T]} [L]}{\frac{[M]}{[L][T]^2}} = [L]^2 = \text{dimensão de área}$$

- Unidade mais utilizada em engenharia de reservatórios é o Darcy:

$$1 \text{ Darcy} = \frac{\text{cm}^2 \cdot \text{cp}}{\text{s} \cdot \text{atm}} = 9,87 \times 10^{-13} \text{ m}^2$$

- 1 Darcy corresponde à permeabilidade de um meio com 1 cm de comprimento em que um fluido de viscosidade igual a 1 cp, submetido a uma diferença de potencial de 1 atm escoará com uma velocidade de 1 cm/s

Permeabilidade e Lei de Darcy

- Valores típicos de permeabilidade para reservatórios de petróleo se situam entre 100 e 5000 mD
- Recentemente com o interesse em *tight oil* e *tight gas*, reservatórios com permeabilidades muito baixas ($< 0,1$ mD) também tem despertado grande interesse

Permeabilidade e Lei de Darcy

- Forma diferencial da Lei de Darcy ($h \rightarrow 0$):

$$v = -\frac{k}{\mu} \frac{d\Phi}{dz} = -\frac{k}{\mu} \left(\frac{dp}{dz} + \rho g \right)$$

- O sinal de menos aparece pois o escoamento se dá do maior para o menor potencial
- Para escoamento multidimensional em meio homogêneo e isotrópico:

$$\vec{v} = -\frac{k}{\mu} \nabla \Phi = -\frac{k}{\mu} (\nabla p + \rho \vec{g})$$

Permeabilidade e Lei de Darcy

- Em geral a permeabilidade varia com a posição no espaço (heterogeneidade) e a direção (anisotropia)
- Trata-se então a permeabilidade como um tensor que varia no espaço:

$$k(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{xy} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{xz} & k_{yz} & k_{zz} \end{bmatrix}$$

- É muito comum assumir que os eixos coordenados estão alinhados com as direções principais e considerar k diagonal

$$k(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} k_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & k_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & k_{zz} \end{bmatrix}$$

Permeabilidade e Lei de Darcy

- Observações Finais:
 - ✓ A definição de potencial apresentada se aplica a fluidos incompressíveis. Para fluidos compressíveis, a definição deve levar em conta a dependência da densidade na pressão
 - ✓ Existem diversas “deduções” da lei de Darcy a partir das equações de balanço de quantidade de movimento
 - ✓ A lei de Darcy se aplica bem a escoamentos lentos, que é o caso mais comum em engenharia de reservatórios
 - ✓ Existem extensões para situações de velocidades mais elevadas
 - ✓ Note que a lei de Darcy é semelhante à lei de Fourier para transmissão de calor e à lei de Fick da difusão

Dedução da Equação para Escoamento Monofásico

- Vamos obter a equação diferencial que modela o escoamento de um fluido em um meio poroso
- O princípio básico é a lei de conservação de massa:

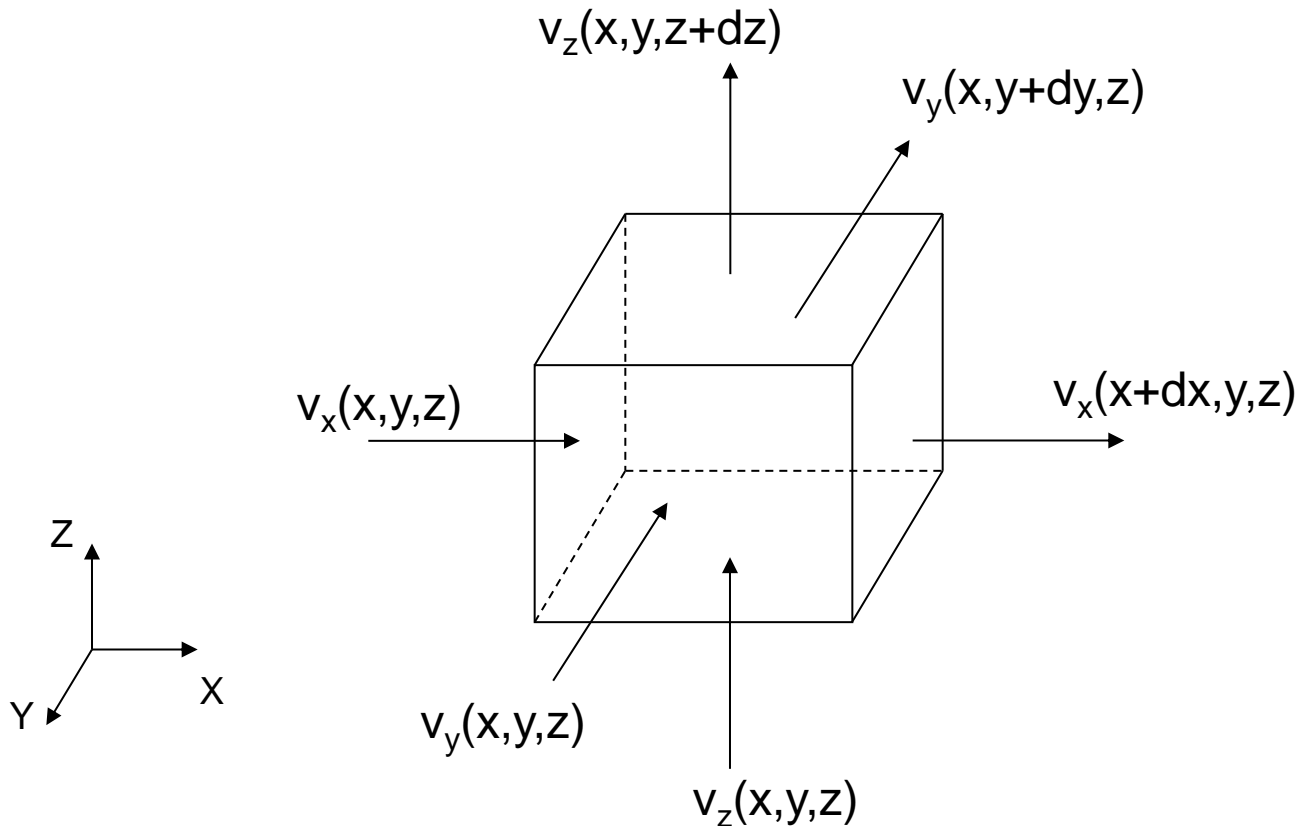
Em um volume de controle fixo no espaço, a variação de massa em um intervalo de tempo é igual à massa que entrou menos a que saiu através das fronteiras ou por ação de fontes ou sumidouros”

$$\text{Entrada} - \text{Saída} = \text{Acumulação}$$

Dedução da Equação para Escoamento Monofásico

Volume de controle retangular $V = [x, x + dx] \times [y, y + dy] \times [z, z + dz]$

$\vec{v}(x, y, z) = (v_x(x, y, z), v_y(x, y, z), v_z(x, y, z)) =$ velocidade do fluido



Dedução da Equação para Escoamento Monofásico

Denotando a densidade do fluido por ρ , a massa no volume M em um instante t é dada por

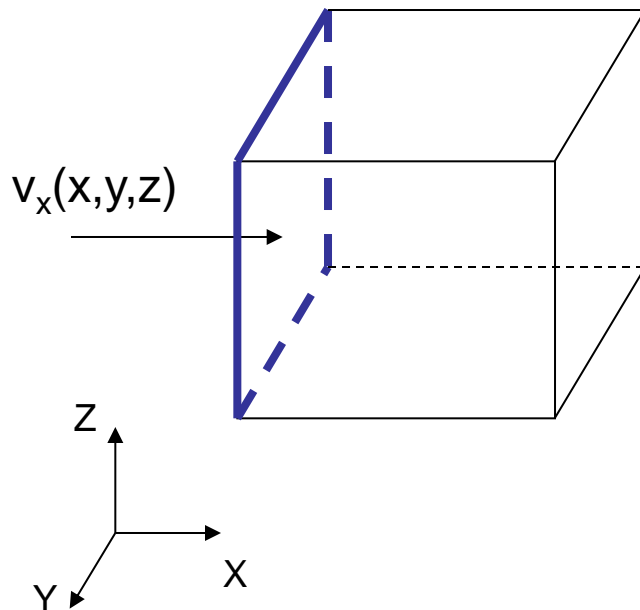
$$M(t) = \iiint_V (\phi\rho)(x, y, z, t) dV$$

Variação de Massa em um intervalo de tempo $[t, t+dt]$:

$$\begin{aligned} M(t + dt) - M(t) &= \iiint_V [(\phi\rho)(x, y, z, t + dt) - (\phi\rho)(x, y, z, t)] dV = \\ &= \iiint_V \int_t^{t+dt} \frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t} ds dV \end{aligned}$$

Dedução da Equação para Escoamento Monofásico

Massa atravessando a face perpendicular ao eixo X no ponto (x,y,z) no instante t :

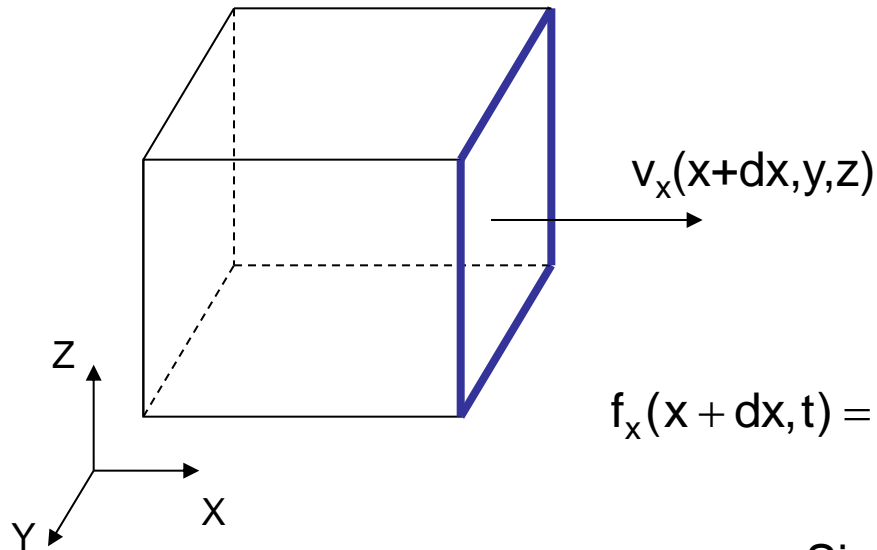


$$f_x(x,t) = \int_y^{y+dy} \int_z^{z+dz} (\rho v_x)(x,y,z,t) dy dz$$

Sinal positivo para massa entrando!!

Dedução da Equação para Escoamento Monofásico

Massa atravessando a face perpendicular ao eixo X no ponto $(x+dx, y, z)$ no instante t:



$$f_x(x + dx, t) = -\int_y^{y+dy} \int_z^{z+dz} (\rho v_x)(x + dx, y, z, t) dy dz$$

Sinal negativo para massa entrando!!

Dedução da Equação para Escoamento Monofásico

Massa atravessando as faces perpendiculares ao eixo X no intervalo $[t, t+dt]$:

$$\begin{aligned} & \int_t^{t+dt} (f_x(x, s) + f_x(x + dx, s)) ds = \\ &= \int_t^{t+dt} \int_z^{z+dz} \int_y^{y+dy} [(\rho v_x)(x, y, z, s) - (\rho v_x)(x + dx, y, z, s)] dy dz ds = \\ &= - \int_t^{t+dt} \left[\int_z^{z+dz} \int_y^{y+dy} \int_x^{x+dx} \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} dx dy dz \right] dt = - \int_t^{t+dt} \iiint_V \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} dV dt \end{aligned}$$

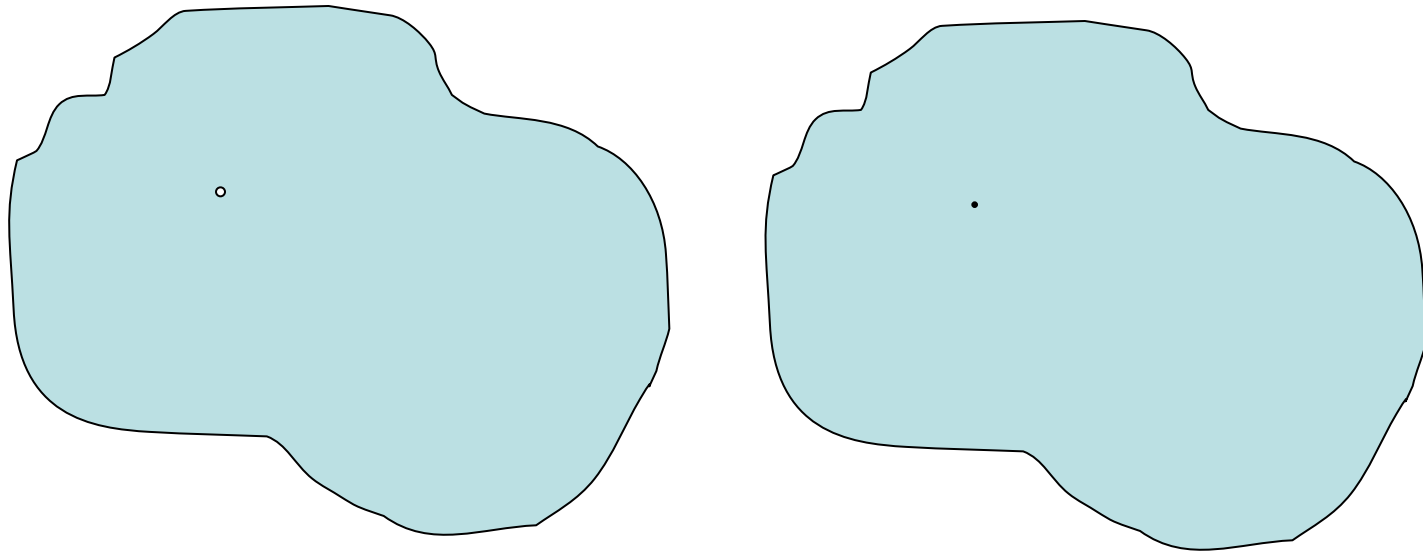
Raciocinando analogamente para as direções Y e Z, a massa total atravessando as faces do volume de controle V no intervalo $[t, t+dt]$ é dada por

$$- \int_t^{t+dt} \iiint_V \left[\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} \right] dV dt = - \int_t^{t+dt} \iiint_V \nabla \cdot (\rho \vec{v}) dV dt$$

Dedução da Equação para Escoamento Monofásico

Tratamento da produção e injeção de fluidos através dos poços:

- Raio dos poços raio é da ordem de centímetros
- A distância entre os poços é da ordem de centenas de metros
- Em muitas aplicações, é conveniente não considerar os poços como fronteira e tratá-los como fontes ou sumidouros pontuais



Dedução da Equação para Escoamento Monofásico

Seja q a vazão volumétrica específica (vazão por unidade de volume) de uma fonte ($q > 0$, injeção) ou sumidouro ($q < 0$, produção) situada no volume de controle V .

A massa agregada à V por q no intervalo de tempo $[t, t+dt]$ é dada por

$$\int_t^{t+dt} \iiint_V (\rho q) dV ds$$

Sinal positivo para injeção (acrécimo de massa) e negativo para produção (retirada de massa)

Dedução da Equação para Escoamento Monofásico

Juntando acumulação, fluxo e termos fontes:

$$\iiint_V \int_t^{t+dt} \frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t} dsdV = -\int_t^{t+dt} \iiint_V \nabla \cdot (\rho\vec{v})dVds + \int_t^{t+dt} \iiint_V (\rho q)dVds$$

$$\int_t^{t+dt} \iiint_V \left[\frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\vec{v}) - (\rho q) \right] dVds = 0$$

Como V e o intervalo de tempo $[t, t+dt]$ são arbitrários, o integrando deve ser nulo:

$$\boxed{\frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\vec{v}) - (\rho q) = 0}$$

Equação de balanço de massa ou da continuidade

Dedução da Equação para Escoamento Monofásico

A equação geral para escoamento monofásico é obtida substituindo a lei de Darcy na equação da continuidade:

$$\vec{v} = -\frac{k}{\mu}(\nabla p + \rho\vec{g})$$

$$\frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t} - \nabla \cdot \left(\frac{\rho k}{\mu} (\nabla p + \rho\vec{g}) \right) - (\rho q) = 0$$

Em geral, na equação acima assumimos:

- k é um tensor diagonal conhecido em função da posição (não varia com o tempo)
- $\rho = \rho(p)$, $\phi = \phi(p)$ e $\mu = \mu(p)$ são funções conhecidas da pressão

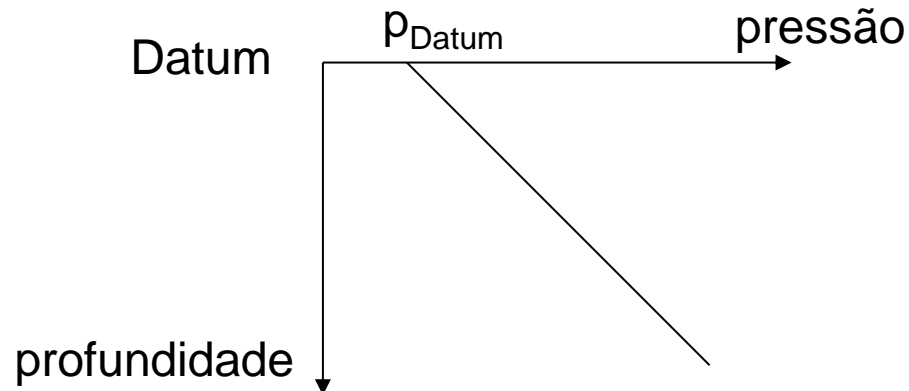
Dedução da Equação para Escoamento Monofásico

A equação para escoamento monofásico requer ainda a especificação de condições iniciais e de fronteira:

- Em simulação de reservatórios, a condição inicial é geralmente determinada para que haja equilíbrio hidrostático, isto é, Φ constante:

$$\nabla\Phi = 0 \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \text{ e } \frac{\partial p}{\partial z} = \rho g$$

- Por exemplo, assumindo densidade constante, a distribuição inicial de pressão é uma reta com inclinação positiva com a profundidade



Dedução da Equação para Escoamento Monofásico

- A condição de fronteira mais usada é fluxo nulo, isto é, $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ onde \vec{n} é a normal à fronteira
- Outra condição encontrada é especificar que em parte da fronteira a pressão é mantida em um certo nível (por exemplo, pela ação de um aquífero)

Dedução da Equação para Escoamento Monofásico

Em resumo, $p(x,t)$ deve satisfazer

$$\frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t} - \nabla \cdot \left(\frac{\rho k}{\mu} (\nabla p + \rho \vec{g}) \right) - (\rho q) = 0 \quad (x,t) \in \Omega \times [0,T] \quad \text{EDP}$$

$$p(x,0) = p_i(x) \quad x \in \Omega \quad \text{Condição Inicial}$$

$$\left(\frac{\rho k}{\mu} (\nabla p + \rho \vec{g}) \right) \cdot \vec{n} = 0 \quad (x,t) \in \Gamma_N \times [0,T] \quad \text{Condições de Fronteira}$$

$$p(x,t) = p_E(x,t) \quad (x,t) \in \Gamma_D \times [0,T]$$

onde Ω é o domínio de interesse com fronteira $\Gamma = \Gamma_N \cup \Gamma_D$

As equações acima são acrescidas de equações de estado $\rho = \rho(p)$,
 $\phi = \phi(p)$ e $\mu = \mu(p)$

Análise para Alguns Casos Especiais

- As equações apresentadas constituem um sistema de EDP's não lineares extremamente complexo
- Soluções para este problema só podem ser obtidas através de técnicas numéricas aproximadas
- Mesmo a natureza do comportamento da solução é difícil de ser percebido pelas equações
- Adicionando hipóteses simplificadoras, vamos considerar versões destas equações que resultam em EDP's clássicas que modelam diversos outros fenômenos físicos

Análise para Alguns Casos Especiais

- A compressibilidade do fluido é a propriedade que caracteriza a variação de volume com a variação de pressão:

$$c_f = \frac{1}{V_f} \frac{dV_f}{dp} = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp}$$

- Para fluidos de compressibilidade constante (líquidos ideais), sendo ρ_o a densidade medida em uma pressão de referência p_o , da definição acima segue que

$$\rho = \rho_o \exp[c_f(p - p_o)]$$

- Para este caso,

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = c_f \rho \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial y} = c_f \rho \frac{\partial p}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \rho}{\partial z} = c_f \rho \frac{\partial p}{\partial z} \Rightarrow \nabla \rho = \frac{1}{c_f \rho} \nabla p$$

Análise para Alguns Casos Especiais

- Substituindo na equação de balanço de massa,

$$\frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t} - \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{k}}{c_f \mu} (\nabla\rho + \rho\vec{g}) \right) - (\rho q) = 0$$

- Ignorando efeitos gravitacionais e a presença de fontes e sumidouros e assumindo ϕ e μ constantes,

$$\phi\mu c_f \frac{\partial\rho}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathbf{k}\nabla\rho)$$

- Equação da difusividade linear, mesma que aparece em diversas outras aplicações, como transferência de calor.
- Para \mathbf{k} diagonal,

$$\phi\mu c_f \frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial\rho}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial\rho}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial\rho}{\partial z} \right)$$

Análise para Alguns Casos Especiais

- Assumindo k homogêneo e isotrópico $k_x = k_y = k_z = k$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) = k \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} \right) = k \nabla^2 \rho$$

$$\nabla^2 \rho = \text{Laplaciano de } \rho$$

- Utilizando a definição do operador Laplaciano,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \alpha \nabla^2 \rho, \quad \alpha = \frac{k}{\phi \mu c_f}$$

- Esta é a familiar equação do calor, o protótipo das equações parabólicas.

Análise para Alguns Casos Especiais

- Nas aplicações é preferível usar a pressão, que é melhor medida, que a densidade
- Fazendo a hipótese adicional de pequena compressibilidade, boa para líquidos, podemos fazer a aproximação

$$\rho \approx \rho_o [1 + c_f (p - p_o)]$$

⇓

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho_o c_f \frac{\partial p}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = \rho_o c_f \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} = \rho_o c_f \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} = \rho_o c_f \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}$$

- Substituindo na equação da densidade, temos uma equação para pressão similar à da densidade

$$\frac{\phi \mu c_f}{k} \frac{\partial p}{\partial t} = \nabla^2 p$$

Análise para Alguns Casos Especiais

- A variação da porosidade com a pressão é levada em consideração de uma forma simplificada
- Compressibilidade da porosidade

$$c_{\phi} = \frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial p}$$

- Substituindo no termo de derivada temporal

$$\frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t} = \rho \frac{\partial \phi}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} + \phi \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} = \rho\phi \left(\frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial p} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} \right) \frac{\partial p}{\partial t} = \rho\phi(c_{\phi} + c_f) \frac{\partial p}{\partial t} = \rho\phi c \frac{\partial p}{\partial t}$$

$$c = c_{\phi} + c_f = \text{compressibilidade total}$$

Análise para Alguns Casos Especiais

- Resulta na mesma equação com a compressibilidade total substituindo a compressibilidade do fluido

$$\frac{\phi\mu c}{k} \frac{\partial p}{\partial t} = \nabla^2 p$$

- Note que a equação acima é não-linear já que $\phi = \phi(p)$
- A prática comum é ignorar esta dependência e tratar o termo multiplicando a derivada temporal como constante

Análise para Alguns Casos Especiais

- Para fluidos incompressíveis, a equação anterior se reduz à equação de Laplace, protótipo para as equações elípticas,

$$\nabla^2 p = 0$$

- Restringindo à fluxo unidimensional linear em um intervalo $[0, L]$ e acrescentando condições de pressão prescrita nas fronteiras:

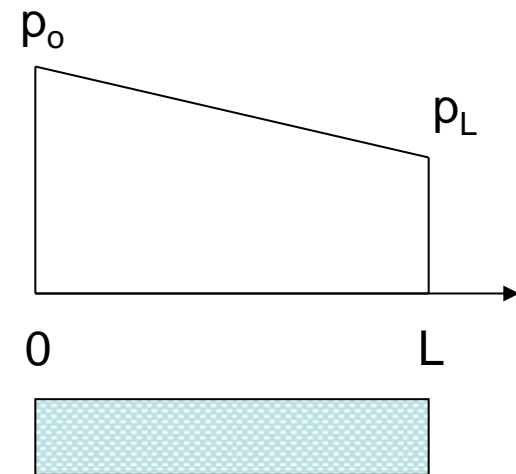
$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0, \quad p(0) = p_o, p(L) = p_L$$

⇓

$$p = p_o + \left(\frac{p_L - p_o}{L} \right) x$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p_L - p_o}{L} = \text{cte} \Rightarrow$$

velocidade (e vazão) constante no domínio



Análise para Alguns Casos Especiais

- Vamos considerar o efeito de heterogeneidade analisando o escoamento unidimensional linear:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 0, \quad p(0) = p_o, \quad \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=L} = \alpha$$

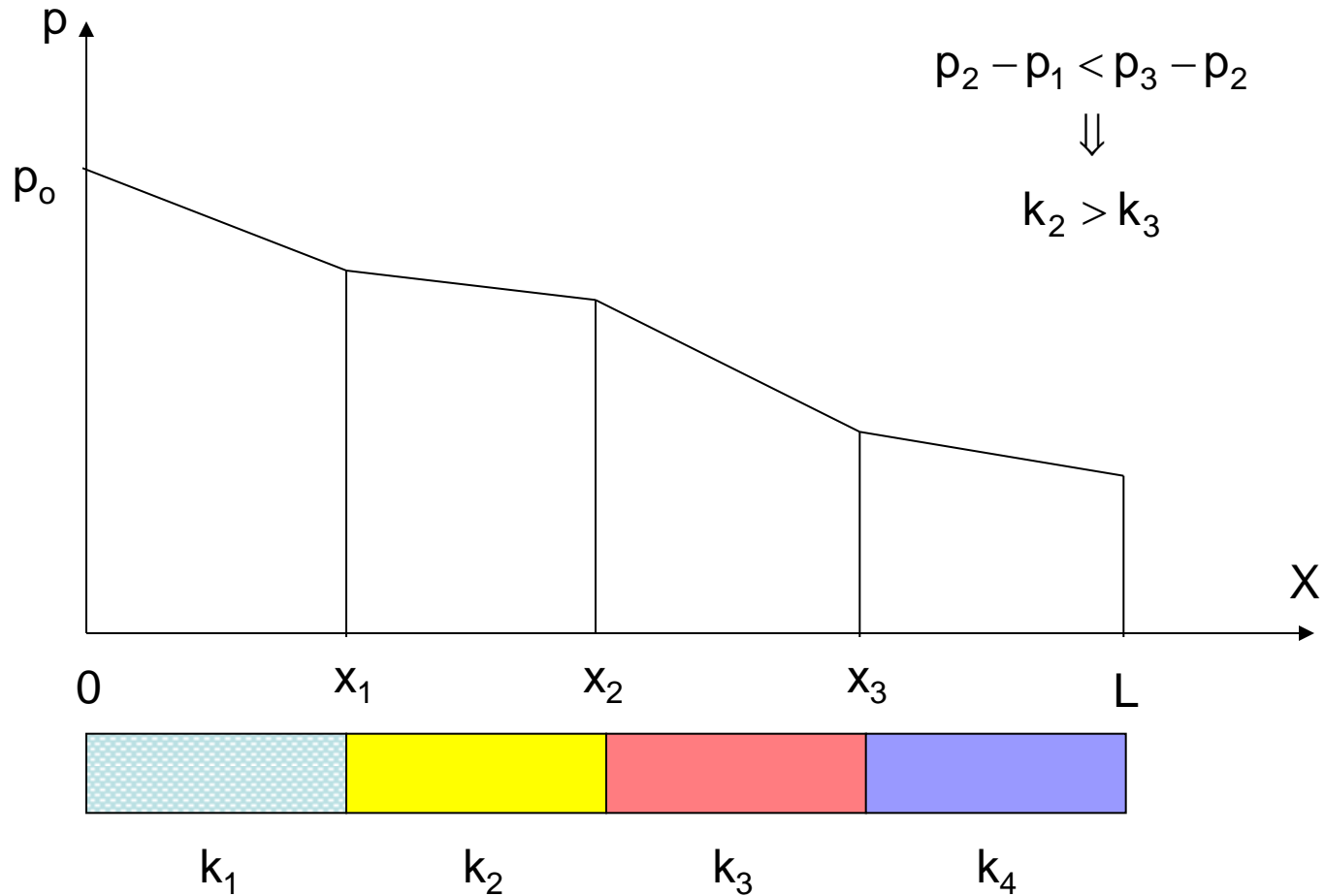
⇓

$$k(L) \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=L} - k(x) \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \Rightarrow k(x) \frac{\partial p}{\partial x} = \alpha k(L) \Rightarrow p = p_o + \int_0^x \frac{\alpha k(L)}{k(s)} ds$$

$$\bar{v}(x) = -\frac{k(x)}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\alpha k(L)}{\mu} = \text{constante}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\alpha k(L)}{k(x)} = \text{variável}$$

Análise para Alguns Casos Especiais



UNIVERSIDADE

Introdução à Simulação de Reservatórios Petrolíferos

Prof. José Roberto P. Rodrigues
(PETROBRAS/CENPES)

Programa de Verão LNCC – Fevereiro de 2015

Escoamento Monofásico – Formulação Numérica

- Tópicos
 - Escoamento Incompressível 1D
 - Formulação do problema contínuo. Princípio de máximo.
 - Discretização pelo método dos volumes finitos (MVF). Malhas de pontos distribuídos e centrada na célula
 - Monotonicidade e Convergência
 - Escoamento Incompressível 2D e 3D
 - Discretização pelo MVF em malhas cartesianas
 - MVF em malhas realistas
 - Discretização de 7 pontos em malhas “corner-point”
 - Introdução a métodos de múltiplos pontos (MPFA) e malhas não estruturadas

Escoamento Monofásico – Formulação Numérica

- Tópicos (cont.)
 - Escoamento Pouco Compressível
 - Formulação do problema contínuo. Princípio de máximo.
 - Discretização pelo método dos volumes finitos (MVF)
 - Estabilidade. Métodos explícitos e implícitos
 - Tratamento de Poços
 - Escoamento Compressível
 - Breve Descrição do Métodos de Solução

MVF – Caso Incompressível 1D

- O método dos volumes finitos (MVF) é o mais utilizado em simulação de reservatórios e base para praticamente todos os simuladores comerciais de reservatórios
- Inicialmente, apresentaremos os princípios básicos do MVF em um contexto bastante simples: escoamento incompressível em uma dimensão
- Problemas progressivamente mais complexos irão ser apresentados na sequência

MVF – Caso Incompressível 1D

- O escoamento 1D linear incompressível em um meio horizontal de seção transversal de área constante resulta em

$$-(k(x)p_x)_x = q_m(x), \quad 0 \leq x \leq L$$

- Vamos assumir que $k(x) \geq k_0 > 0$. Como visto anteriormente, a permeabilidade k pode ser altamente descontínua, com saltos em função de mudanças de litologia
- É necessário também especificar condições nos extremos $x = 0$ e $x = L$

MVF – Caso Incompressível 1D

- Antes de completar a formulação do problema com a imposição de condições de fronteira, vamos discutir uma propriedade importante dessa equação
- Princípio de máximo:

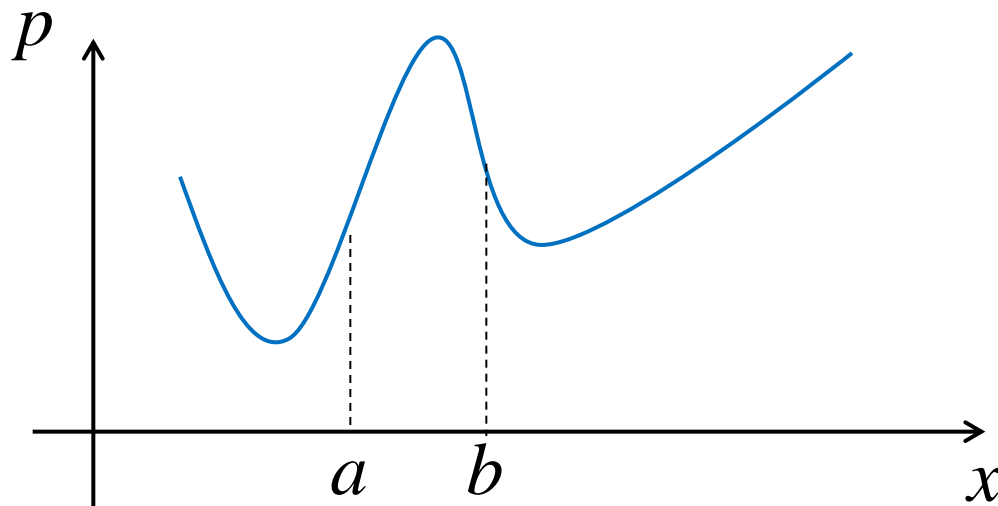
Se $q_m(x) \leq 0$ para $a < x < b$, então

$$p(x) \leq \max\{p(a), p(b)\}$$

- Expressa a ideia intuitiva de que ao retirar massa (produção) a maior pressão deve estar nas fronteiras

MVF – Caso Incompressível 1D

- O princípio de máximo impõe restrições sobre as soluções admissíveis para o problema, em particular, não podem haver oscilações em regiões onde $q_m(x) \leq 0$



Se $q_m \leq 0$ em (a,b) , o perfil ao lado viola o princípio de máximo e, portanto, não representa uma solução válida

MVF – Caso Incompressível 1D

- Um princípio de mínimo similar também vale para o caso em que $q_m(x) \geq 0$

Se $q_m(x) \geq 0$ para $a < x < b$, então

$$p(x) \geq \min\{p(a), p(b)\}$$

- Corresponde ao caso em que massa é adicionada (injeção) e, portanto, a menor pressão deve estar nas fronteiras

MVF – Caso Incompressível 1D

- Para $q_m(x) = 0$ (ausência de fontes/sumidouros), valem tanto o princípio de máximo como o de mínimo e, portanto,

$$\min\{p(a), p(b)\} \leq p(x) \leq \max\{p(a), p(b)\}$$

- Por representar uma importante propriedade física do problema, métodos numéricos para aproximá-lo devem idealmente respeitar alguma versão discreta do princípio do máximo

MVF – Caso Incompressível 1D

- Para demonstrar o princípio de máximo, vamos tomar $k = 1$ e considerar primeiramente o caso $q_m < 0$
- Se p assumisse o valor máximo em um ponto x_0 em (a,b) , teríamos

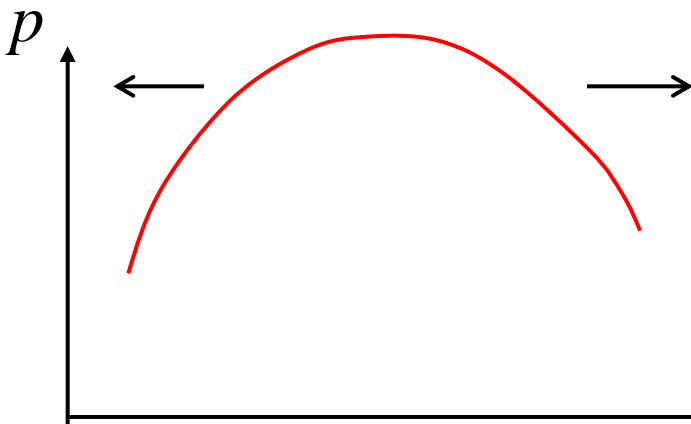
$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=x_0} = 0 \text{ e } \left. \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right|_{x=x_0} \leq 0$$

o que contradiz $q_m = -\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} < 0$

- Assim, para $q_m < 0$ temos

$$\max_{a \leq x \leq b} p(x) = \max \{ p(a), p(b) \}$$

MVF – Caso Incompressível 1D



- Um máximo no interior significaria concavidade para baixo, indicando retirada de massa em uma região em torno do máximo
- Isso é incompatível com retirada de massa por fonte produtora ($q_m < 0$)

MVF – Caso Incompressível 1D

- O caso $q \leq 0$ será reduzido ao caso anterior considerando a função $s = p + \varepsilon r$, onde ε é um número real positivo arbitrário e r é tal que
 1. $r \geq 0$ em (a,b) e
 2. $-\partial^2 r / \partial x^2 < 0$ em (a,b)
- $r(x) = (x - a)^2$ satisfaz as condições acima, já que

$$-\partial^2 r / \partial x^2 = -2$$

MVF – Caso Incompressível 1D

- Assim,

$$-\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \varepsilon \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = q_m - 2\varepsilon < 0$$

- Temos, portanto, que

$$p(x) \leq p(x) + \varepsilon r(x) \leq \max_{a \leq x \leq b} p(x) + \varepsilon r(x) = \max \{ p(a), p(b) + \varepsilon(b-a)^2 \}$$

- Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, segue que

$$p(x) \leq \max \{ p(a), p(b) \}$$

MVF – Caso Incompressível 1D

- Retornando à questão das condições de fronteira...
- Tipicamente se especifica o valor de pressão (condição de Dirichlet):

$$p(0) = P_0, p(L) = P_L$$

ou o valor da velocidade (condição de Neumann):

$$-k(x)p_x|_{x=0} = f_0, k(x)p_x|_{x=L} = f_L$$

$f_0, f_L > 0$ para entrada de massa pelas fronteiras

$f_0, f_L < 0$ para retirada de massa pelas fronteiras

MVF – Caso Incompressível 1D

- É claro que também se pode especificar um tipo de condição em cada extremidade
- Quando condições de Neumann são especificadas em ambas as extremidades, uma condição de compatibilidade, decorrente do balanço de massa, deve ser imposta entre as velocidades das extremidades e as fontes/sumidouros

MVF – Caso Incompressível 1D

- De fato, integrando de 0 a L :

$$\int_0^L (-(k(x)p_x)_x) dx = \int_0^L q_m(x) dx \Rightarrow$$

$$-k(x)p_x|_{x=L} + k(x)p_x|_{x=0} = \int_0^L q_m(x) dx \Rightarrow$$

$$-f_L - f_0 = \int_0^L q_m(x) dx \Rightarrow$$

$$\int_0^L q_m(x) dx + f_0 + f_L = 0$$

- Em particular para fluxo nulo nas fronteiras:

$$\int_0^L q_m(x) dx = 0$$

MVF – Caso Incompressível 1D

- Uma segunda observação importante para o caso com condições de Neumann é que as pressões ficam determinadas a menos de uma constante
- De fato, se p é uma solução então $p + C$ também é, já que

$$\frac{\partial}{\partial x}(p + C) = \frac{\partial p}{\partial x}$$

MVF – Caso Incompressível 1D

- Após a discussão inicial sobre a formulação do problema, iniciaremos aqui a discussão sobre a técnica de volumes finitos (MVF) para encontrar soluções aproximadas
- No método de volumes finitos a discretização é feita dividindo o domínio em “volumes de controle” (*células* ou *blocos* da *malha*) onde uma aproximação para uma forma integral da equação original é feita aproximando os fluxos nas suas fronteiras
- Em cada uma das células é escolhido um ponto onde a variável a ser determinada é aproximada

MVF – Caso Incompressível 1D

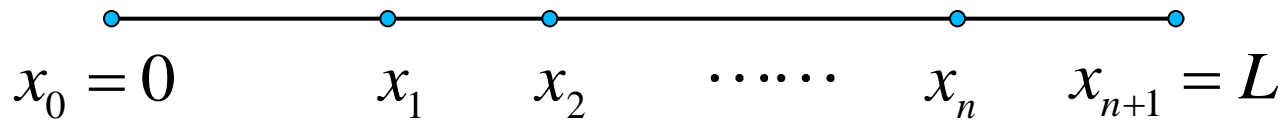
- Pela sua construção, o método de volumes finitos reproduz os princípios básicos de conservação das leis físicas originárias das EDP's a nível de cada volume de controle, o que dá ao método uma interpretação física poderosa e particularmente útil em situações complexas
- É a metodologia mais empregada em simuladores comerciais de reservatório e amplamente discutida na literatura

MVF – Caso Incompressível 1D

- Para o problema 1D, as células são subintervalos de $[0,L]$
- Existem duas abordagens para definição das células e dos pontos onde aproximações de p serão obtidas: malha de pontos (ou vértices) distribuídos (*point-distributed* ou *vertex-distributed*) e malha centrada na célula (ou no bloco) (*cell-centered* ou *block-centered*)

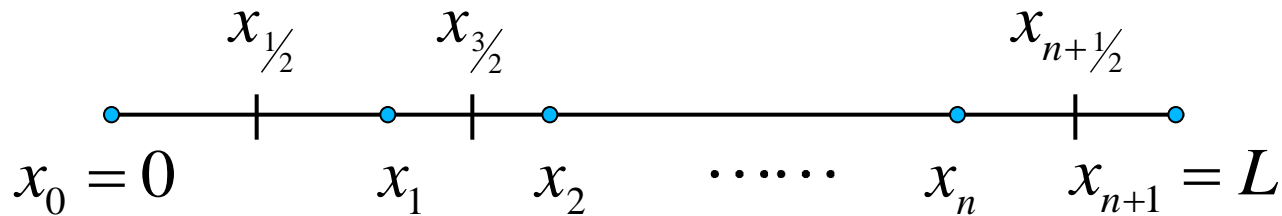
MVF – Caso Incompressível 1D

- Na malha de pontos distribuídos, os pontos x_i são dados e as células $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ definidas de forma que suas fronteiras estejam no ponto médio dos pontos x_i



MVF – Caso Incompressível 1D

- Na malha de pontos distribuídos, os pontos x_i são dados e as células $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ definidas de forma que suas fronteiras estejam no ponto médio dos pontos x_i

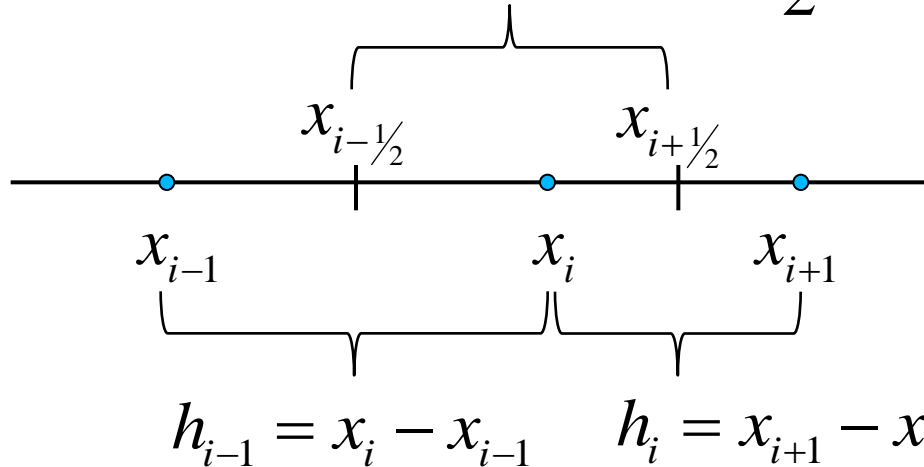


MVF – Caso Incompressível 1D

- Malha de pontos distribuídos

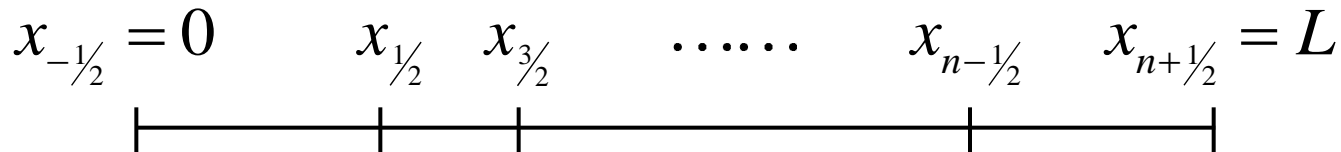
$$x_{i+1/2} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2} = x_i + \frac{h_i}{2} = x_{i+1} - \frac{h_i}{2}$$

$$h_{i+1/2} = x_{i+1/2} - x_{i-1/2} = \frac{h_i + h_{i-1}}{2}$$



MVF – Caso Incompressível 1D

- Na malha centrada na célula, as fronteiras $x_{i+1/2}$ são dadas e os pontos x_i definidos no ponto médio das células $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$



MVF – Caso Incompressível 1D

- Na malha centrada na célula, as fronteiras $x_{i+1/2}$ são dadas e os pontos x_i definidos no ponto médio das células $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$

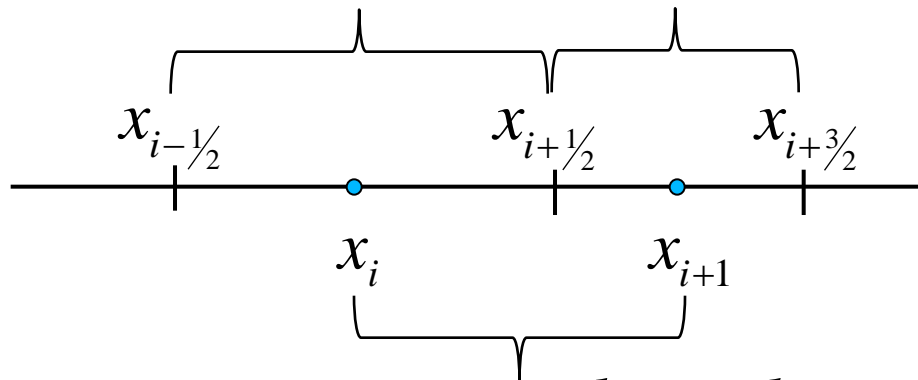


MVF – Caso Incompressível 1D

- Malha centrada na célula

$$x_i = \frac{x_{i+1/2} + x_{i-1/2}}{2} = x_{i-1/2} + \frac{h_{i+1/2}}{2} = x_{i+1/2} - \frac{h_{i+1/2}}{2}$$

$$h_{i+1/2} = x_{i+1/2} - x_{i-1/2} \quad h_{i+3/2} = x_{i+3/2} - x_{i+1/2}$$



$$h_i = x_{i+1} - x_i = \frac{h_{i+1/2} + h_{i+3/2}}{2}$$

MVF – Caso Incompressível 1D

- Em simulação de reservatórios é mais comum a utilização de malhas centradas na célula pela maior facilidade de alinhar as fronteiras da células com as descontinuidades nas propriedades petrofísicas decorrentes da heterogeneidades das rochas
- Embora resultem em esquemas distintos para malhas não uniformes, a derivação do MVF é inteiramente similar nos dois casos (diferenças maiores no tratamento das condições de fronteira)

MVF – Caso Incompressível 1D

- Integrando a EDP na célula $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$:

$$-\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} (k(x) p_x)_x dx = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q_m(x) dx$$

⇓

$$-kp_x \Big|_{x_{i+1/2}} + kp_x \Big|_{x_{i-1/2}} = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q_m(x) dx$$

- Os termos $kp_x \Big|_{x_{i\pm 1/2}}$ representam as velocidades através das fronteiras da célula

MVF – Caso Incompressível 1D

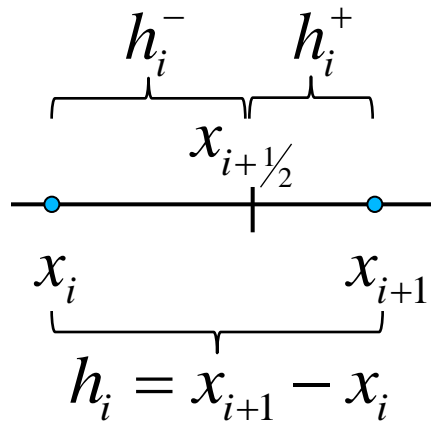
- O valor da derivada de p na face das células é aproximado por diferenças finitas

$$p_x|_{x_{i+1/2}} \approx \frac{p_{i+1} - p_i}{h_i}$$

- Na expressão acima, p_i denota o valor de p aproximado pelo MVF

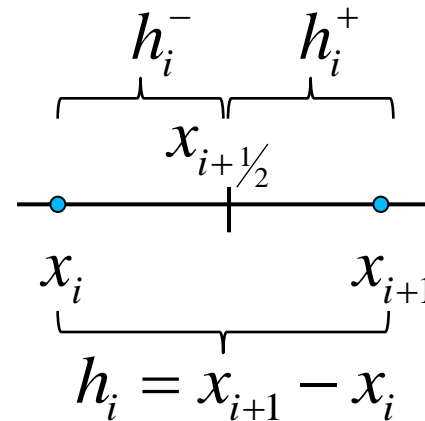
- A aproximação da derivada pode ser justificada por expansão em série de Taylor
- Notação: $h_i^+ = x_{i+1} - x_{i+1/2}$ $h_i^- = x_{i+1/2} - x_i$

Malha centrada
na célula



$$h_i^+ \neq h_i^-$$

Malha de pontos
distribuídos



$$h_i^+ = h_i^-$$

MVF – Caso Incompressível 1D

- A notação P_i irá indicar o valor de p avaliada no ponto x_i , ou seja, $P_i = p(x_i)$ = valor da solução exata no ponto x_i
- Expandindo em série de Taylor, temos

$$P_{i+1} = P_{i+1/2} + h_i^+ p_x(x_{i+1/2}) + \frac{(h_i^+)^2}{2} p_{xx}(x_{i+1/2}) + O(h_i^3)$$

$$P_{i-1} = P_{i+1/2} - h_i^- p_x(x_{i+1/2}) + \frac{(h_i^-)^2}{2} p_{xx}(x_{i+1/2}) + O(h_i^3)$$

MVF – Caso Incompressível 1D

- Subtraindo as duas expressões

$$P_{i+1} - P_{i-1} = (h_i^+ + h_i^-) p_x(x_{i+1/2}) + \frac{(h_i^+)^2 - (h_i^-)^2}{2} p_{xx}(x_{i+1/2}) + O(h_i^3)$$

⇓

$$P_{i+1} - P_{i-1} = (h_i^+ + h_i^-) p_x(x_{i+1/2}) + \frac{(h_i^+ + h_i^-)(h_i^+ - h_i^-)}{2} p_{xx}(x_{i+1/2}) + O(h_i^3)$$

⇓ $h_i = h_i^+ + h_i^-$

$$\frac{P_{i+1} - P_{i-1}}{h_i} = p_x(x_{i+1/2}) + \frac{h_i^+ - h_i^-}{2} p_{xx}(x_{i+1/2}) + O(h_i^2)$$

MVF – Caso Incompressível 1D

- Para malha de pontos distribuídos ($h_i^+ = h_i^-$):

$$\frac{P_{i+1} - P_{i-1}}{h_i} = p_x(x_{i+1/2}) + O(h_i^2)$$

- Para malha centrada na célula ($h_i^+ \neq h_i^-$):

$$\frac{P_{i+1} - P_{i-1}}{h_i} = p_x(x_{i+1/2}) + O(h_i)$$

- Uma análise mais cuidadosa irá mostrar que o erro $e_i = p_i - P_i$ converge quadraticamente para ambas as malhas

MVF – Caso Incompressível 1D

- O valor de k na face das células deve ser estimado a partir dos valores de k em cada uma células vizinhas i e $i+1$
- Uma aproximação simples é a média aritmética

$$k_{i+\frac{1}{2}} = \frac{k_{i+1} + k_i}{2}$$

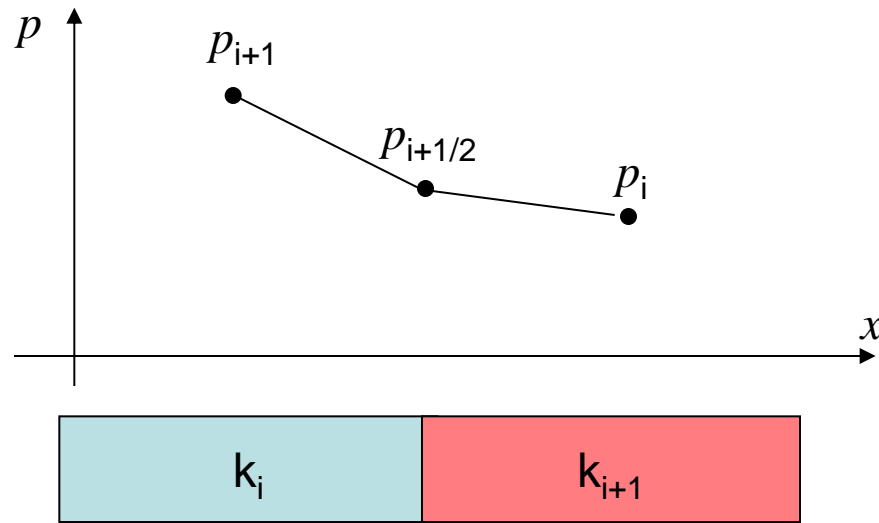
- Se k é uma função suave (possui duas derivadas) a média aritmética é uma aproximação $O(h^2)$ para o valor correto

MVF – Caso Incompressível 1D

- No caso em que k é descontínua na face, a média harmônica é mais usada

$$k_{i+1/2} = \frac{h_{i+1/2} + h_{i+3/2}}{\frac{h_{i+1/2}}{k_i} + \frac{h_{i+3/2}}{k_{i+1}}} = \frac{(h_{i+1/2} + h_{i+3/2})k_i k_{i+1}}{h_{i+1/2}k_{i+1} + h_{i+3/2}k_i}$$

- A média harmônica aparece naturalmente pela imposição de continuidade da velocidade nas fronteiras das células



- Para malha uniforme

$$k_i \frac{p_{i+1/2} - p_i}{h/2} = k_{i+1} \frac{p_{i+1} - p_{i+1/2}}{h/2} \Rightarrow p_{i+1/2} = \frac{k_i p_i + k_{i+1} p_{i+1}}{k_i + k_{i+1}}$$

$$k_{i+1/2} \frac{p_{i+1} - p_i}{h} = k_i \frac{p_{i+1/2} - p_i}{h/2} \Rightarrow k_{i+1/2} (p_{i+1} - p_i) = 2k_i \left(\frac{k_i p_i + k_{i+1} p_{i+1}}{k_i + k_{i+1}} - p_i \right)$$

$$k_{i+1/2} = \frac{2k_i k_{i+1}}{k_i + k_{i+1}} = \frac{2}{\frac{1}{k_i} + \frac{1}{k_{i+1}}}$$

MVF – Caso Incompressível 1D

- Para o caso 1D com seção transversal de área constante, o termo fonte q_m corresponde à vazão mássica específica dada em termos de vazão mássica por unidade de comprimento
- Assim, o termo

$$Q_{m_i} = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q_m(x) dx$$

corresponde à vazão mássica (massa/tempo) que iremos assumir especificada (corresponde à vazão dos poços de injeção ou produção)

MVF – Caso Incompressível 1D

- Em geral, a vazão volumétrica em condições padrão (de superfície) Q_{sc} é especificada
- Para o problema incompressível, a densidade é constante e não precisamos nos preocupar em converter de condições de reservatório para padrão e temos simplesmente que

$$Q_{m_i} = \rho Q_{sc}$$

- Calcular a pressão de fluxo nos poços é um problema relevante que será tratado mais adiante

MVF – Caso Incompressível 1D

- Retornando ao balanço de massa na célula, juntando as expressões das velocidades nas faces e do termo fonte

$$-k_{i+1/2} \frac{p_{i+1} - p_i}{h_i} + k_{i-1/2} \frac{p_i - p_{i-1}}{h_{i-1}} = Q_{m_i}$$

⇓

$$-T_{i+1/2} p_{i+1} + (T_{i+1/2} + T_{i-1/2}) p_i - T_{i-1/2} p_{i-1} = Q_{m_i}$$

$$T_{i+1/2} = \frac{k_{i+1/2}}{h_i} > 0 \text{ é a transmissibilidade na face } i + \frac{1}{2}$$

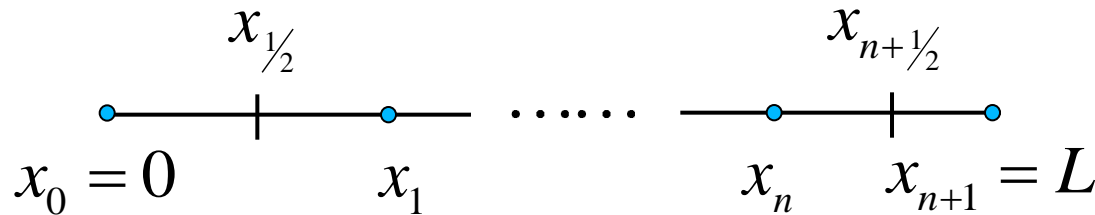
MVF – Caso Incompressível 1D

- Para completar a definição do MVF é necessário discutir o tratamento das condições de fronteira (CF)
- Como o posicionamento de pontos e células é diferente para as malhas de pontos distribuídos e centrada na célula, o tratamento das CF será distinto
- Iniciamos considerando pressão especificada (condição de Dirichlet)

$$p(0) = P_0, p(L) = P_L$$

MVF – Caso Incompressível 1D

- No caso de malha de pontos distribuídos, existem pontos sobre a fronteira



- Os valores podem ser especificados diretamente:

$$p_0 = P_0, p_{n+1} = P_L$$

- Esses valores são utilizados no cálculo das velocidades em $x_{1/2}$ e $x_{n+1/2}$

MVF – Caso Incompressível 1D

- O balanço de massa para a célula $[x_{1/2}, x_{3/2}]$ é dado por

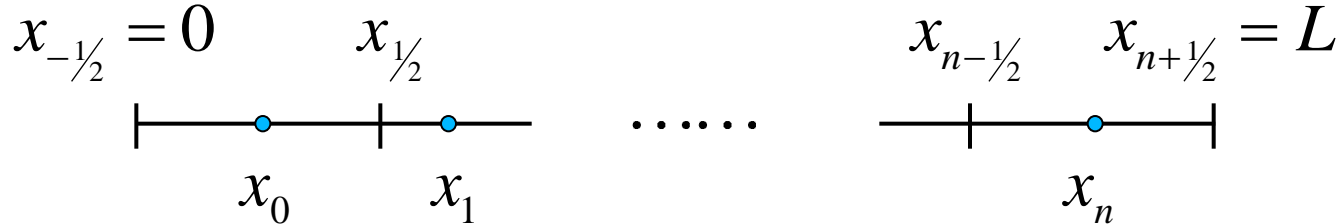
$$-k_{3/2} \frac{p_2 - p_1}{h_2} + k_{1/2} \frac{p_1 - p_0}{h_1} = Q_{m_1}$$

$$-T_{3/2} p_2 + (T_{3/2} + T_{1/2}) p_1 = T_{1/2} p_0 + Q_{m_1}$$

- O tratamento da célula $[x_{n-1/2}, x_{n+1/2}]$ é análogo
- Note que o balanço de massa não é calculado em todo o domínio $[0, L]$, já que não é escrito um balanço de massa para os intervalos $[0, x_{1/2}]$ e $[x_{n-1/2}, L]$

MVF – Caso Incompressível 1D

- No caso de malha centrada na célula, as fronteiras externas coincidem com as fronteiras das células



- As velocidades nas fronteiras externas são calculadas utilizando os valores de pressão especificados

$$f_0 = k_0 \frac{p_0 - P_0}{h_{1/2} / 2}, \quad f_L = -k_n \frac{P_L - p_n}{h_{n+1/2} / 2}$$

MVF – Caso Incompressível 1D

- Balanço de massa para a célula $[x_{1/2}, x_{3/2}]$:

$$-k_{1/2} \frac{p_1 - p_0}{h_1} + k_0 \frac{p_0 - P_0}{h_{1/2} / 2} = Q_{m_0}$$

$$\Downarrow T_{-1/2} = 2k_0 / h_{3/2}$$

$$-T_{1/2} p_1 + (T_{1/2} + T_{-1/2}) p_0 = T_{-1/2} P_0 + Q_{m_0}$$

- A célula $[x_{n-1/2}, x_{n+1/2}]$ tem tratamento similar

MVF – Caso Incompressível 1D

- Para interpretar esse tratamento da CF, considere o caso particular homogêneo ($k_{3/2} = k_0 = k$) de malha uniforme ($h_1 = h_{3/2} = h$) e sem fontes ($Q_{m_0} = 0$):

$$-k \frac{p_1 - p_0}{h} + k \frac{p_0 - P_0}{h/2} = 0$$

⇓

$$P_0 = \frac{3p_0}{2} - \frac{p_1}{2}$$

- Corresponde à interpolação linear e, portanto, representa uma aproximação $O(h^2)$ para a CF

MVF – Caso Incompressível 1D

- Para velocidade especificada (condição de Neumann)

$$-k(x)p_x|_{x=0} = f_0, \quad k(x)p_x|_{x=L} = f_L$$

basta incluir os valores especificados diretamente no balanço de massa das células nos extremos:

$$\begin{aligned} -k_{\frac{1}{2}} \frac{p_1 - p_0}{h_1} - f_0 &= Q_{m_0} & -f_L + k_{n-\frac{1}{2}} \frac{p_n - p_{n-1}}{h_n} &= Q_{m_n} \\ T_{\frac{1}{2}} p_0 - T_{\frac{1}{2}} p_1 &= Q_{m_0} + f_0 & -T_{n-\frac{1}{2}} p_{n-1} + T_{n-\frac{1}{2}} p_n &= Q_{m_n} + f_L \end{aligned}$$

MVF – Caso Incompressível 1D

- Os balanços de massa descritos anteriormente resultam em uma equação linear por célula, com uma incógnita a determinar por célula (a pressão p_i)
- Vamos analisar a existência e unicidade de solução para esse sistema e a convergência das soluções obtidas, ou seja, quão rapidamente a solução aproximada obtida pelo MVF se aproxima da solução exata quando a malha é refinada

MVF – Caso Incompressível 1D

- Para fixar ideias, vamos considerar malha centrada na célula com condição de Dirichlet em um extremo e Neumann no outro
- Os casos com malha de pontos distribuídos e/ou com condição de Dirichlet nos dois extremos são similares
- O problema com condição de Neumann é ligeiramente mais complexo e será tratado separadamente

- Sistema linear para determinar p_0, p_1, \dots, p_n com condição de Dirichlet em $x = 0$ e Neumann em $x = L$:

$$\begin{array}{rcccc}
 \Sigma_0 p_0 & - & T_{1/2} p_1 & & = Q_{m_0} + T_{-1/2} P_0 \\
 -T_{1/2} p_0 & + & \Sigma_1 p_1 & - & T_{3/2} p_2 & = & Q_{m_1} \\
 & & \ddots & & \ddots & & \vdots \\
 & & & & -T_{i-1/2} p_{i-1} & + & \Sigma_i p_i & - & T_{i+1/2} p_{i+1} & = & Q_{m_i} \\
 & & & & \ddots & & \ddots & & \ddots & & \vdots \\
 & & & & & & & & -T_{n-1/2} p_{n-1} & + & T_{n-1/2} p_n & = & Q_{m_n} + f_L
 \end{array}$$

$$\Sigma_i = T_{i-1/2} + T_{i+1/2}$$

- Para analisar as propriedades desse sistema, mostraremos que ele satisfaz o seguinte princípio de máximo discreto

Se $Q_{m_i} \leq 0$ e $f_L \leq 0$ então $p_i \leq p_0 \leq P_0$, $1 \leq i \leq n$

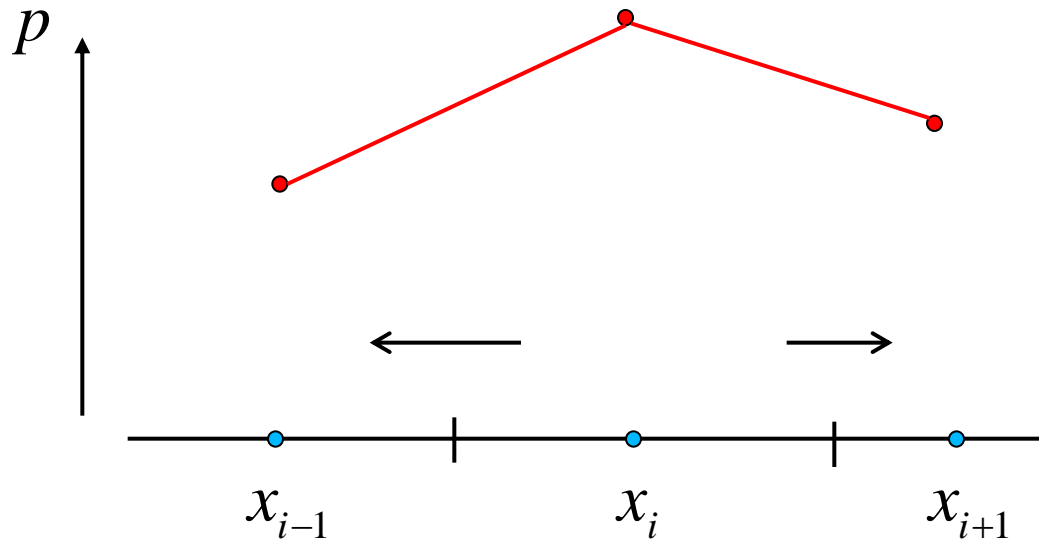
- De fato, seja i_0 tal que $p_{i_0} > p_i$ para todo $i \neq i_0$
- Se $1 \leq i_0 \leq n - 1$, teríamos

$$\begin{aligned}
 & -T_{i_0-1/2}p_{i_0-1} + \Sigma_{i_0}p_{i_0} - T_{i_0+1/2}p_{i_0+1} = \\
 & T_{i_0-1/2}(p_{i_0} - p_{i_0-1}) + T_{i_0+1/2}(p_{i_0} - p_{i_0+1}) > 0
 \end{aligned}$$

já que $T_{i_0 \pm 1/2} > 0$, o que não é possível para $Q_{m_{i_0}} \leq 0$

MVF – Caso Incompressível 1D

- Note que essa contradição expressa o fato de que, em uma célula onde fontes estão retirando massa, a pressão não pode ser maior que nas células vizinhas, já que induziria retirada de massa pelas fronteiras



MVF – Caso Incompressível 1D

- Analogamente, se $i_0 = n$, teríamos

$$-T_{i_0-1/2}p_{i_0-1} + T_{i_0-1/2}p_{i_0} = T_{i_0-1/2}(p_{i_0} - p_{i_0-1}) > 0$$

já que $T_{i_0-1/2} > 0$, o que não é possível para $Q_{m_{i_0}} \leq 0$ e $f_L \leq 0$

- Se existir i_0 com essa propriedade, necessariamente $i_0 = 0$, de onde segue $p_{i_0} \leq P_0$, já que

$$\Sigma_{i_0} p_{i_0} - T_{i_0+1/2} p_{i_0+1} = Q_{m_0} + T_{i_0-1/2} P_0 \Rightarrow$$

$$T_{i_0-1/2} (p_{i_0} - P_0) + T_{i_0+1/2} (p_{i_0} - p_{i_0+1}) = Q_{m_0} \leq 0$$

MVF – Caso Incompressível 1D

- Como consequência do princípio de máximo, segue a seguinte propriedade para a matriz \mathbf{A}

Se $\mathbf{A}\mathbf{p} = \mathbf{b}$ com $\mathbf{b} \leq \mathbf{0}$, então $\mathbf{p} \leq \mathbf{0}$

- De fato, basta considerar um problema com $P_0 = 0$, $f_0 = f_L = 0$, $Q_{m_i} = \mathbf{b}_i$ e aplicar o princípio de máximo

MVF – Caso Incompressível 1D

- Um princípio de mínimo discreto análogo também é satisfeito

$$\text{Se } Q_{m_i} \geq 0 \text{ e } f_L \geq 0 \text{ então } p_i \geq P_0, \quad 0 \leq i \leq n$$

de onde segue que

$$\text{Se } \mathbf{A}\mathbf{p} = \mathbf{b} \text{ com } \mathbf{b} \geq \mathbf{0}, \text{ então } \mathbf{p} \geq \mathbf{0}$$

- Combinando os princípios de mínimo e de máximo segue que \mathbf{A} é não-singular, já que

$$\mathbf{A}\mathbf{p} = \mathbf{0} \implies \mathbf{p} = \mathbf{0}$$

- Uma outra consequência do princípio de máximo é que todas as entradas da inversa de \mathbf{A} são não-negativas (\mathbf{A} é monótona)

$$\mathbf{A}^{-1} \geq \mathbf{0}$$

- De fato, a j -ésima coluna de \mathbf{A}^{-1} , \mathbf{x}_j , é obtida pela resolução do sistema

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_j = \mathbf{e}_j, \quad \mathbf{e}_j = [0, \dots, 1, \dots, 0]^T \geq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x}_j \geq \mathbf{0}$$

- A monotonicidade é uma propriedade desejável, já que evita o aparecimento de oscilações espúrias nas soluções numéricas

- Quando condições de Neumann são especificadas nos dois extremos, temos o seguinte sistema linear:

$$\begin{array}{rcccc}
 T_{1/2}p_0 & - & T_{1/2}p_1 & & = Q_{m_0} + f_0 \\
 -T_{1/2}p_0 & + & \Sigma_1 p_1 & - & T_{3/2}p_2 & = & Q_{m_1} \\
 & & \ddots & & \ddots & & \vdots \\
 & & & & -T_{i-1/2}p_{i-1} & + & \Sigma_i p_i & - & T_{i+1/2}p_{i+1} & = & Q_{m_i} \\
 & & & & \ddots & & \ddots & & \ddots & & \vdots \\
 & & & & & & & & -T_{n-1/2}p_{n-1} & + & T_{n-1/2}p_n = Q_{m_n} + f_L
 \end{array}$$

$$\Sigma_i = T_{i-1/2} + T_{i+1/2}$$

MVF – Caso Incompressível 1D

- Somando todas as equações:

$$0 = f_0 + f_L + \sum_{i=0}^n Q_{m_i}$$

- Para o sistema ter solução uma condição semelhante à do caso contínuo aparece: o acréscimo e retirada de massa por meio de fontes/sumidouros e através das fronteiras têm que ser balanceados

MVF – Caso Incompressível 1D

- Neste caso, não é possível ter lados direitos positivos ou negativos, mas utilizando argumentos semelhantes aos do princípio do máximo do problema anterior, é possível mostrar que as únicas soluções possíveis para o sistema $\mathbf{A}\mathbf{p} = \mathbf{0}$ são os vetores constantes
- Nos problemas de interesse prático, alguma compressibilidade está sempre presente e essas questões desaparecem

MVF – Caso Incompressível 1D

- Agora estudaremos a questão de convergência da solução aproximada para a solução exata, ou seja, quanto rapidamente o erro cometido diminui quando a malha é refinada
- A análise padrão utilizada no caso de malha uniforme é dificultada pelo aparecimento de termos de $O(h)$ ou mesmo inconsistentes no erro de truncamento para malhas não-uniformes

MVF – Caso Incompressível 1D

- Para simplificar a análise, consideraremos o caso homogêneo (k constante) e condições de Dirichlet em ambos extremos:

$$-p_{xx} = f(x), \quad 0 \leq x \leq L$$

$$p(0) = a, \quad p(L) = b$$

- Nos pontos interiores, o MVF é dado por

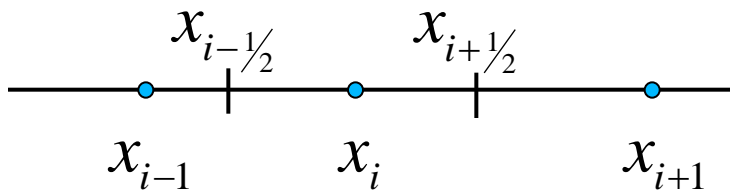
$$-\frac{p_{i+1} - p_i}{h_i} + \frac{p_i - p_{i-1}}{h_{i-1}} = h_{i+\frac{1}{2}} f_i$$

MVF – Caso Incompressível 1D

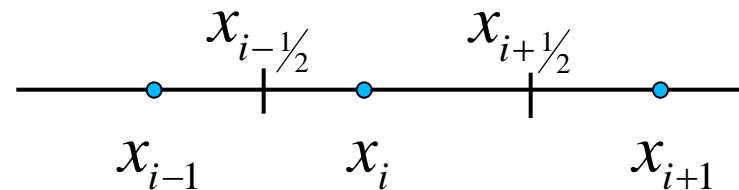
- Dividindo por $h_{i+1/2}$:

$$\frac{1}{h_{i+1/2}} \left(-\frac{p_{i+1} - p_i}{h_i} + \frac{p_i - p_{i-1}}{h_{i-1}} \right) = f_i$$

- Semelhante a uma aproximação de diferenças finitas



Malha centrada na célula



Malha de pontos distribuídos

MVF – Caso Incompressível 1D

- O erro de truncamento é obtido por expansão em série de Taylor (a notação P_i irá indicar o valor de p avaliado no ponto x_i , ou seja, $P_i = p(x_i)$ = valor da solução exata no ponto x_i)

$$P_{i+1} = P_i + h_i p_x(x_i) + \frac{h_i^2}{2} p_{xx}(x_i) + \frac{h_i^3}{6} p_{xxx}(x_i) + \frac{h_i^4}{24} p_{xxxx}(x_i^*)$$

$$P_{i-1} = P_i - h_{i-1} p_x(x_i) + \frac{h_{i-1}^2}{2} p_{xx}(x_i) - \frac{h_{i-1}^3}{6} p_{xxx}(x_i) + \frac{h_{i-1}^4}{24} p_{xxxx}(x_i^{**})$$

$$x_i \leq x_i^* \leq x_{i+1} \text{ e } x_{i-1} \leq x_i^{**} \leq x_i$$

$$\frac{P_{i+1} - P_i}{h_i} = p_x(x_i) + \frac{h_i}{2} p_{xx}(x_i) + \frac{h_i^2}{6} p_{xxx}(x_i) + \frac{h_i^3}{24} p_{xxxx}(x_i^*)$$

$$\frac{P_{i-1} - P_i}{h_{i-1}} = -p_x(x_i) + \frac{h_{i-1}}{2} p_{xx}(x_i) - \frac{h_{i-1}^2}{6} p_{xxx}(x_i) + \frac{h_{i-1}^3}{24} p_{xxxx}(x_i^{**})$$

⇓

$$\frac{1}{h_{i+1/2}} \left(-\frac{P_{i+1} - P_i}{h_i} + \frac{P_i - P_{i-1}}{h_{i-1}} \right) = -p_{xx}(x_i)$$

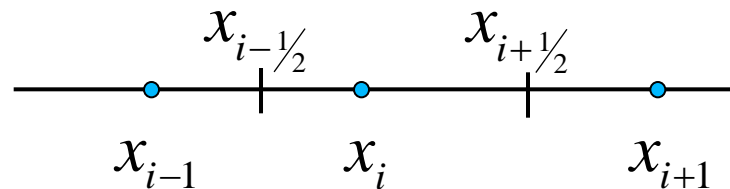
$$+ \left(1 - \frac{h_i + h_{i-1}}{2h_{i+1/2}} \right) p_{xx}(x_i) - \frac{h_i^2 - h_{i-1}^2}{6h_{i+1/2}} p_{xxx}(x_i) + O(h^2)$$

- Expressão para o erro de truncamento:

$$E_T = \left(1 - \frac{h_i + h_{i-1}}{2h_{i+1/2}} \right) p_{xx}(x_i) - \frac{h_i^2 - h_{i-1}^2}{6h_{i+1/2}} p_{xxx}(x_i) + O(h^2)$$

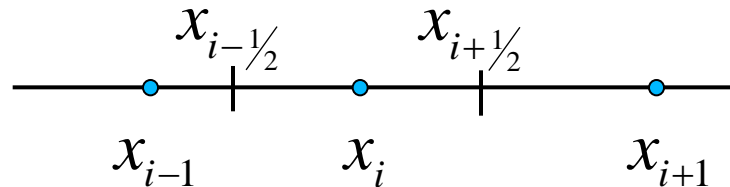
- Para malha de pontos distribuídos, E_T é de primeira ordem

$$h_{i+1/2} = \frac{h_i + h_{i-1}}{2} \Rightarrow E_T = -\frac{h_i - h_{i-1}}{3} p_{xxx}(x_i) + O(h^2) = O(h)$$



MVF – Caso Incompressível 1D

- Para malha centrada na célula o termo principal da expressão de E_T não se anula e o erro é $O(1)$, ou seja, o esquema é inconsistente



- Para malha uniforme, o esquema é de segunda ordem

$$h_{i+1/2} = h_i = h_{i-1} \Rightarrow E_T = O(h^2)$$

MVF – Caso Incompressível 1D

- Na verdade, o que estamos de fato interessados é saber quão bem p_i , resultado da discretização, se aproxima de P_i a solução exata em cada ponto da malha
- Argumentos clássicos, utilizando o princípio de máximo, mostram que o erro $e_i = P_i - p_i$ têm a mesma ordem do erro de truncamento
- Isso é suficiente para mostrar convergência $O(h^2)$ para malha uniforme e $O(h)$ para malha de pontos distribuídos, mas não garante convergência da malha centrada na célula

MVF – Caso Incompressível 1D

- Para apresentar os argumentos clássicos, considere malha uniforme de pontos distribuídos



- A discretização é dada por

$$-\frac{p_{i-1} - 2p_i + p_{i+1}}{h^2} = f_i, \quad 1 \leq i \leq n$$
$$p_0 = a, \quad p_{n+1} = b$$

MVF – Caso Incompressível 1D

- Como na expressão de E_T só aparecem termos envolvendo derivadas de ordem 4, $E_T = 0$ para qualquer polinômio de grau menor ou igual a três
- Em particular, p_{xx} é calculado exatamente para polinômios de grau menor ou igual a três

MVF – Caso Incompressível 1D

- Das expressões para a solução exata e aproximada, segue que

$$\left. \begin{aligned} -\frac{P_{i-1} - 2P_i + P_{i+1}}{h^2} &= f_i + E_T \\ -\frac{p_{i-1} - 2p_i + p_{i+1}}{h^2} &= f_i \end{aligned} \right\} -\frac{e_{i-1} - 2e_i + e_{i+1}}{h^2} = E_T$$
$$P_0 = p_0 = a \text{ e } P_{n+1} = p_{n+1} = b \Rightarrow e_0 = e_{n+1} = 0$$

- O erro satisfaz a mesma discretização da aproximação p com condições homogêneas (nulas) nos extremos do intervalo e lado direito igual ao erro de truncamento

MVF – Caso Incompressível 1D

- Para aplicar o princípio de máximo é necessário controlar o sinal do lado direito, o que será feito pela introdução de uma função auxiliar $\varphi_i = e_i + \Phi_i$ tal que

$$1. \quad -\frac{\varphi_{i-1} - 2\varphi_i + \varphi_{i+1}}{h^2} \leq 0$$

$$2. \quad \varphi_0 = \varphi_{n+1} = O(h^2)$$

- Como $e_0 = e_{n+1} = 0$, a condição 2 requer que $\Phi_0 = \Phi_{n+1} = O(h^2)$

MVF – Caso Incompressível 1D

- Assumindo derivadas de quarta ordem contínuas, o erro de truncamento pode ser limitado por:

$$|E_T| = \frac{h^2}{24} |u_{xxxx}(x_i^*) + u_{xxxx}(x_i^{**})| \leq \frac{h^2}{24} M^{IV} = E_M$$

- Definindo $\Phi(x) = E_M/2 (x - L/2)^2$, $\Phi_{xx}(x) = E_M$ e, como se trata de um polinômio de 2º grau, segue que

$$-\frac{\Phi_{i-1} - 2\Phi_i + \Phi_{i+1}}{h^2} = -E_M$$

- Note também que $\Phi(0) = \Phi(1) = E_M L^2 / 8$

MVF – Caso Incompressível 1D

- Definindo $\varphi_i = e_i + \Phi_i$,

$$-\frac{\varphi_{i-1} - 2\varphi_i + \varphi_{i+1}}{h^2} = E_T - E_M \leq 0 \text{ e } \varphi(0) = \varphi(1) = \frac{E_M L^2}{8}$$

- Pelo princípio de máximo,

$$e_i \leq e_i + \Phi_i \leq \max\{\Phi(0), \Phi(1)\} \leq \frac{E_M L^2}{8} = \frac{L^2 M^{IV}}{96} h^2$$

MVF – Caso Incompressível 1D

- Analogamente, definindo $\varphi_i = -e_i + \Phi_i$,

$$-\frac{\varphi_{i-1} - 2\varphi_i + \varphi_{i+1}}{h^2} = -E_T - E_M \leq 0 \text{ e } \varphi(0) = \varphi(1) = \frac{E_M L^2}{8}$$

- Pelo princípio de máximo,

$$-e_i \leq -e_i + \Phi_i \leq \max\{\Phi(0), \Phi(1)\} \leq \frac{E_M L^2}{8} = \frac{L^2 M^{IV}}{96} h^2$$

- Juntando as duas desigualdades,

$$|e_i| \leq \frac{L^2 M^{IV}}{96} h^2 = O(h^2)$$

MVF – Caso Incompressível 1D

- Para malhas centradas na célula, esse argumento é insuficiente para mostrar convergência, dada a inconsistência dos erros de truncamento
- No entanto, é possível isolar componentes $O(h^2)$ do erro que originam os termos de $O(1)$ e $O(h)$ no erro de truncamento, demonstrando convergência $O(h^2)$
- Esse “paradoxo” pode ser ilustrado considerando o operador diferencial

$$p(x) = h^2 \text{sen} \left(\frac{x}{h} \right) = O(h^2) \Rightarrow p_{xx}(x) = -\text{sen} \left(\frac{x}{h} \right) = O(1)$$

MVF – Caso Incompressível 1D

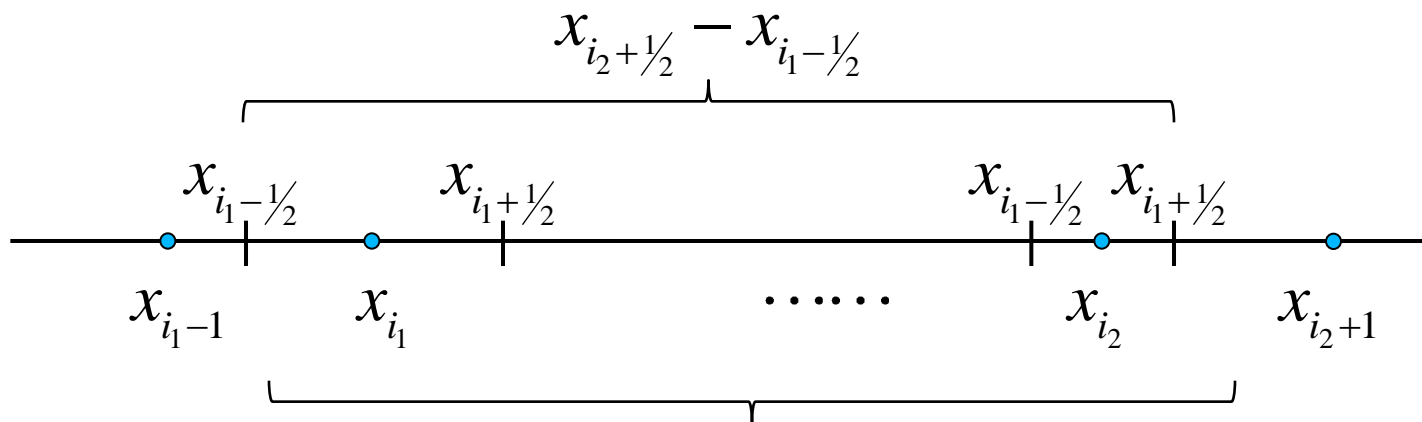
- Relembrando a expressão para o erro de truncamento:

$$E_T = \left(1 - \frac{h_i + h_{i-1}}{2h_{i+1/2}} \right) p_{xx}(x_i) - \frac{h_i^2 - h_{i-1}^2}{6h_{i+1/2}} p_{xxx}(x_i) + O(h^2)$$

- Para entender a natureza do termo $O(1)$ líder, vamos por ora ignorar p_{xx} e integrá-lo em um intervalo fixo

$$\sum_{i=i_1}^{i_2} \left(1 - \frac{h_i + h_{i-1}}{2h_{i+1/2}} \right) h_{i+1/2} = \sum_{i=i_1}^{i_2} h_{i+1/2} - \sum_{i=i_1}^{i_2} \frac{h_i + h_{i-1}}{2} =$$

$$\left(x_{i_2+1/2} - x_{i_1-1/2} \right) - \left(x_{i_2} + \frac{h_{i_2}}{2} - \left(x_{i_1} - \frac{h_{i_1-1}}{2} \right) \right)$$



$$x_{i_2} + \frac{h_{i_2}}{2} - \left(x_{i_1} - \frac{h_{i_1-1}}{2} \right)$$

MVF – Caso Incompressível 1D

- A contribuição agregada do termo $O(1)$ é pequena ($O(h)$) em regiões de tamanho fixo, indicando que elas podem ter um caráter “oscilatório” ou “periódico”
- Essa observação indica que deve ser possível encontrar componentes pequenas do erro que originam esse termo
- De fato, tomando $\phi_i = h_{i+1/2}^2$

$$L_h \phi_i = \frac{1}{h_{i+1/2}} \left(-\frac{h_{i+3/2}^2 - h_{i+1/2}^2}{h_i} + \frac{h_{i+1/2}^2 - h_{i-1/2}^2}{h_{i-1}} \right) =$$

$$\Downarrow \quad h_i = \frac{h_{i+3/2} + h_{i+1/2}}{2}$$

$$= \frac{1}{h_{i+1/2}} \left(-\frac{(h_{i+3/2} + h_{i+1/2})(h_{i+3/2} - h_{i+1/2})}{\frac{h_{i+3/2} + h_{i+1/2}}{2}} + \frac{(h_{i+1/2} + h_{i-1/2})(h_{i+1/2} - h_{i-1/2})}{\frac{h_{i+1/2} + h_{i-1/2}}{2}} \right) =$$

$$\Downarrow \quad h_{i+3/2} = 2h_i - h_{i+1/2}$$

$$= \frac{2}{h_{i+1/2}} \left(-\left(2h_{i+1} - 2h_{i+1/2}\right) + \left(-2h_{i-1} + 2h_{i+1/2}\right) \right) =$$

$$\frac{4}{h_{i+1/2}} \left(2h_{i+1/2} - h_{i+1} - h_{i-1} \right) = 8 \left(1 - \frac{h_i + h_{i-1}}{2h_{i+1/2}} \right)$$

MVF – Caso Incompressível 1D

- A função $\phi/8 = O(h^2)$ tem a propriedade desejada de “gerar” o termo $O(1)$ do erro de truncamento (ignorando a dependência em p_{xx})
- Uma derivação mais trabalhosa mostra que

$$e_i^{(1)} = \frac{\phi_i}{8} p_{xx}(x_i) \Rightarrow L_h e_i^{(1)} = \left(1 - \frac{h_i + h_{i-1}}{2h_{i+1/2}} \right) p_{xx}(x_i) + O(h)$$

ou seja, o termo $O(1)$ de E_T deriva de uma componente $O(h^2)$ do erro

MVF – Caso Incompressível 1D

- Assim,

$$L_h \left(e_i - e_i^{(1)} \right) = E_T - \left(1 - \frac{h_i + h_{i-1}}{2h_{i+1/2}} \right) p_{xx}(x_i) + O(h) = O(h)$$

- Os argumentos clássicos usados no caso de malha uniforme podem ser usados para mostrar a convergência $O(h)$

$$L_h \left(e_i - e_i^{(1)} \right) = O(h) \Rightarrow e_i - e_i^{(1)} = O(h) \Rightarrow e_i = O(h)$$

MVF – Caso Incompressível 1D

- Da mesma forma, é possível encontrar uma componente $e_i^{(h)} = O(h^2)$ que isola os termos $O(h)$ de E_T de forma que

$$L_h \left(e_i - e_i^{(1)} - e_i^{(h)} \right) = O(h^2) \Rightarrow e_i - e_i^{(1)} - e_i^{(h)} = O(h^2) \Rightarrow e_i = O(h^2)$$

- As CF também introduzem componentes especiais no erro de truncamento que necessitam ser isoladas como acima, mas a conclusão final é que a convergência do MVF em malha centrada na célula é $O(h^2)$

MVF – Caso Incompressível 1D

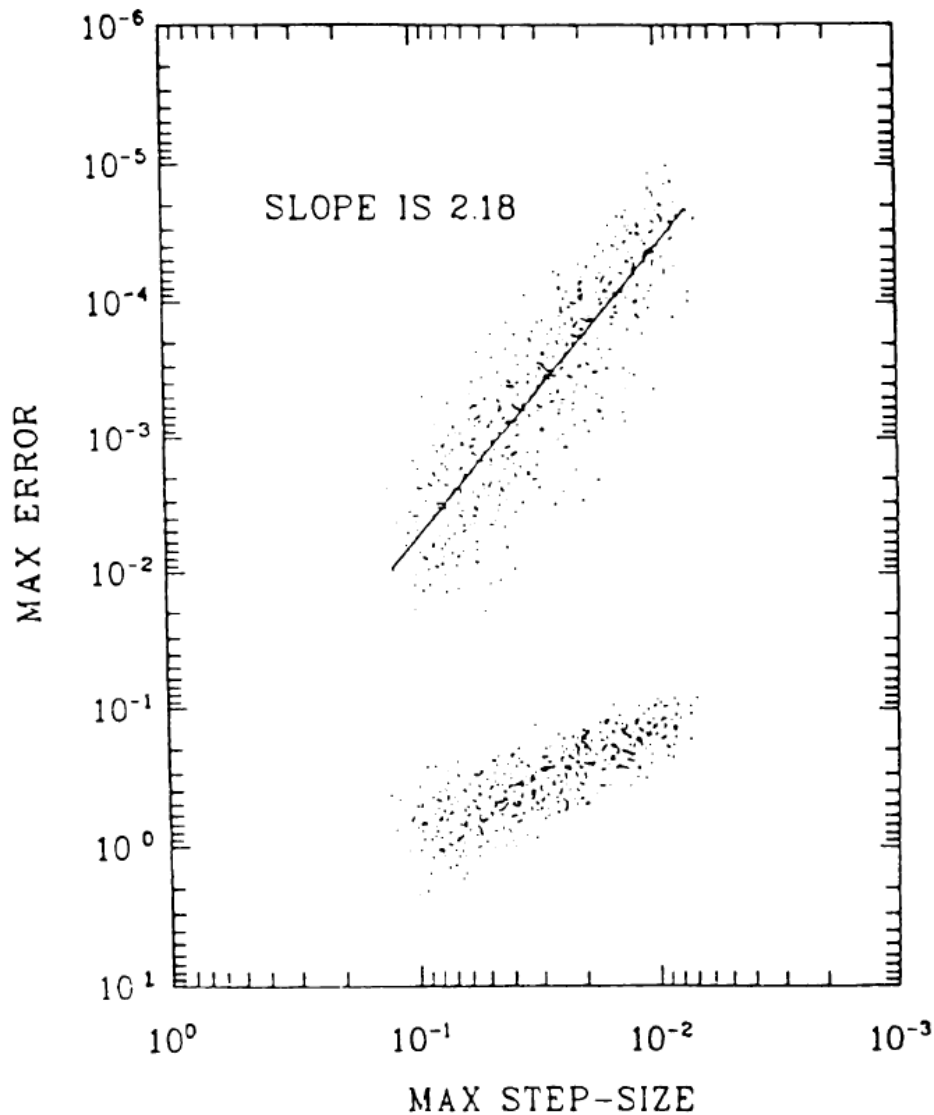
- A mesma abordagem pode ser utilizada para mostrar que a convergência do MVF em malha de pontos distribuídos é $O(h^2)$ apesar de $E_T = O(h)$
- A discussão acima é baseada em
 - Forsyth & Sammon, Quadratic Convergence for Cell-Centered Grids, *Applied Numerical Mathematics*, 1988
- Ver também
 - Manteuffel & White, The Numerical Solution of Second-Order BVP on Nonuniform Meshes, *Mathematics of Computation*, 1986

MVF – Caso Incompressível 1D

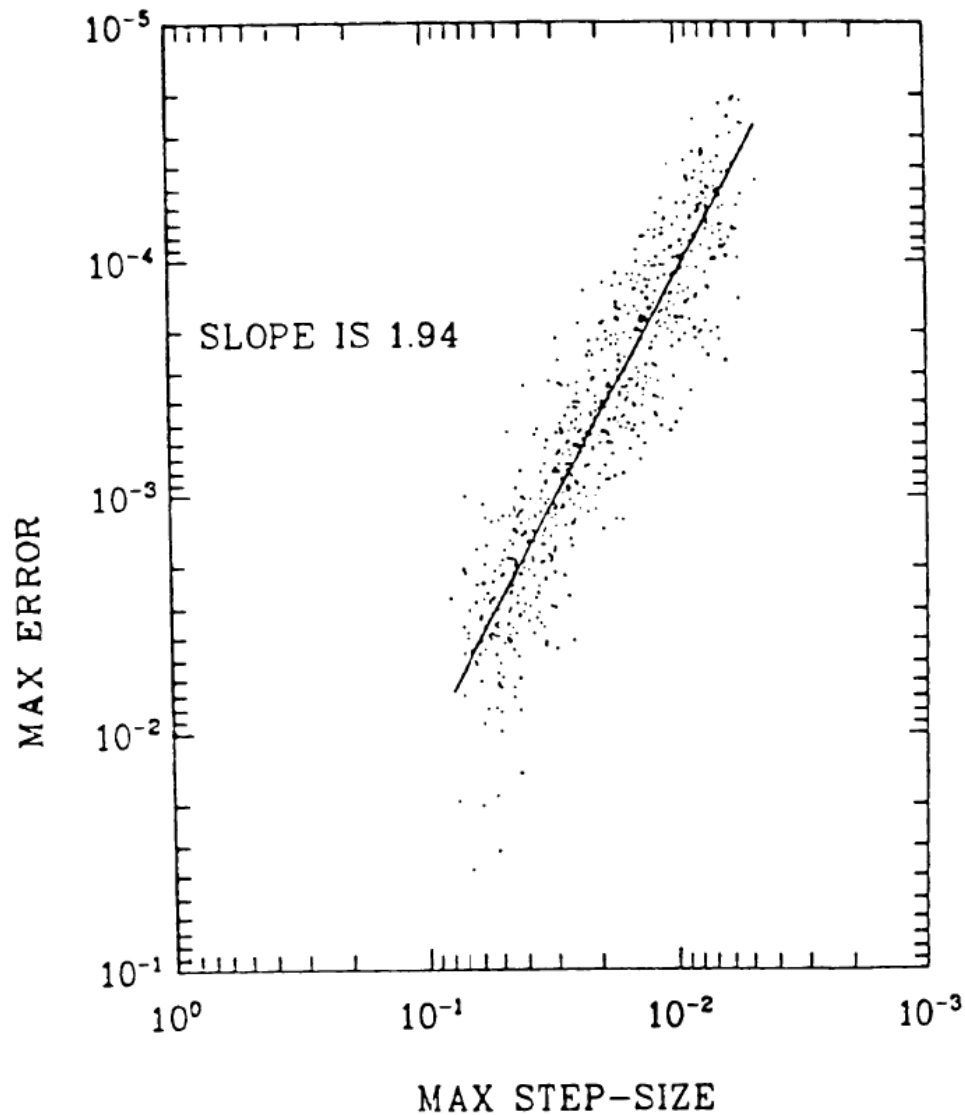
- Experimentos numéricos do paper de Manteuffel & White

$$(3x + 1)^2 y'' + 9y' + 9 \left[\frac{1}{4}(3x + 1)^2 - 1 \right] y = 0,$$
$$y'(0), y(1) \text{ given.}$$

- 700 malhas com espaçamento gerado aleatoriamente e n variando de 100 a 800



- Malha de pontos distribuídos
- A nuvem de pontos superior corresponde aos erros e_i
- A nuvem de pontos inferior corresponde ao erro de truncamento



- Malha centrada na célula
- A nuvem de pontos corresponde aos erros e_i

MVF – Caso Incompressível 2D e 3D

- Os problemas de interesse prático são (quase) sempre modelados em 3D
- Iremos agora estender a metodologia de volumes finitos para 2D e 3D
- A discretização será apresentada inicialmente para a malha mais simples (cartesiana)
- Neste contexto, a extensão para 2D e 3D é uma generalização quase imediata do MVF 1D
- Malhas mais complexas serão tratadas em seguida

MVF – Caso Incompressível 2D e 3D

- O escoamento 2D incompressível em um meio horizontal de espessura constante e tensor de permeabilidades diagonal resulta em

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x(x, y) \frac{\partial p}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y(x, y) \frac{\partial p}{\partial y} \right) = q_m(x, y)$$

$$(x, y) \in \Omega = [a, b] \times [c, d] \quad (\text{domínio retangular})$$

- A hipótese de \mathbf{K} diagonal significa que os eixos coordenados foram alinhados com as direções principais de \mathbf{K}

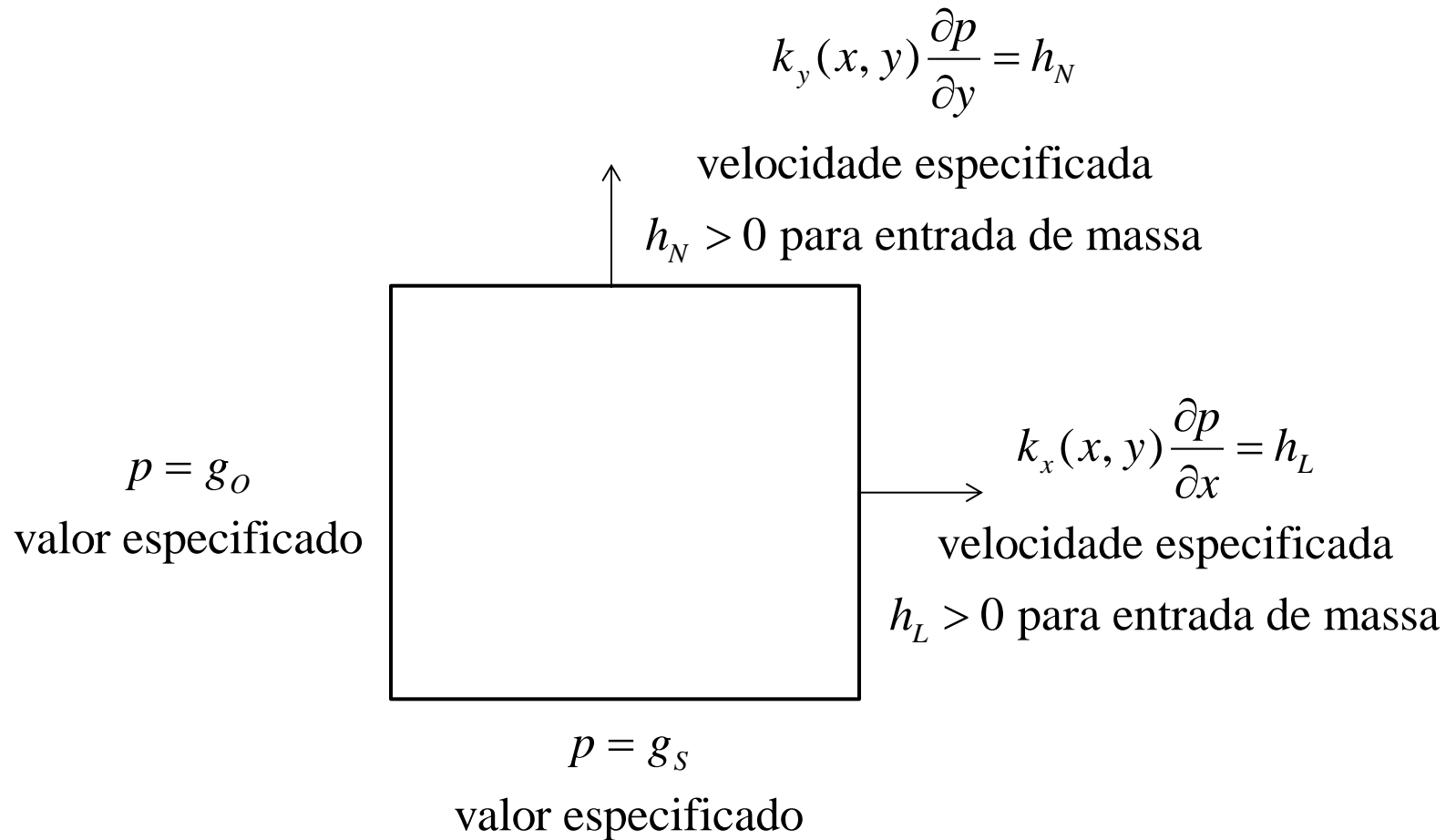
MVF – Caso Incompressível 2D e 3D

- O operador diferencial acima satisfaz um princípio de máximo que generaliza o caso 1D: se $q_m \leq 0$ em uma região D com fronteira Γ , então $p \leq$ máximo de p em Γ
- A demonstração utiliza o mesmo argumento por contradição do caso 1D e expressa o fato que, em uma região onde há apenas retirada de massa pelas fontes, o máximo de p não pode estar no interior, já que isso indicaria retirada de massa pelas fronteiras também

MVF – Caso Incompressível 2D e 3D

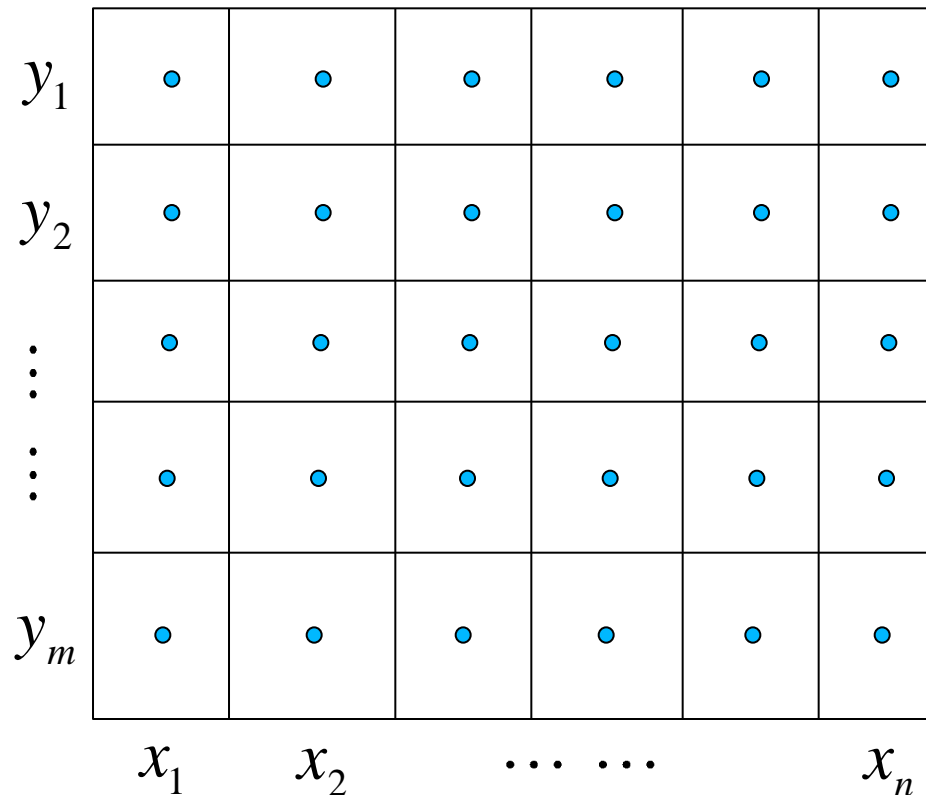
- É necessário especificar condições de fronteira que podem ser Dirichlet (valor da função especificada) ou Neumann (valor de velocidade especificado)
- Para fixar ideias, durante a apresentação do MVF, vamos tomar uma configuração específica para as CF
- O tratamento se generaliza facilmente para outras configurações

MVF – Caso Incompressível 2D e 3D

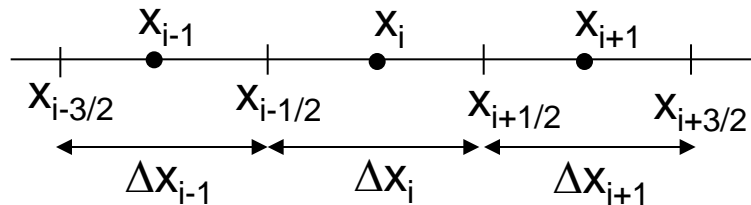
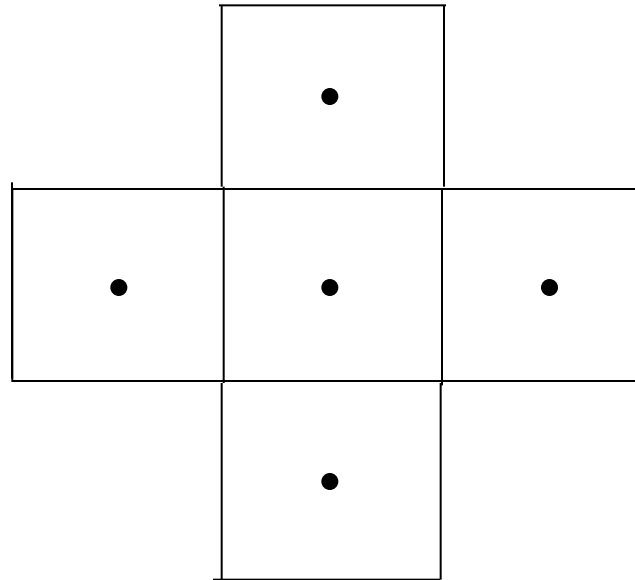
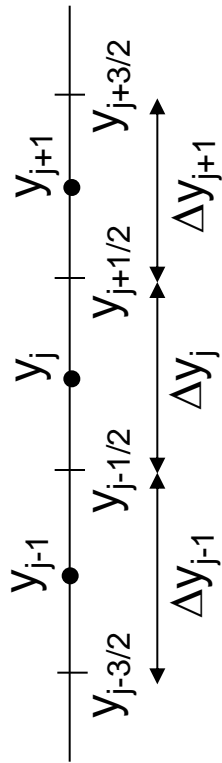


MVF – Caso Incompressível 2D e 3D

- Malha centrada na célula

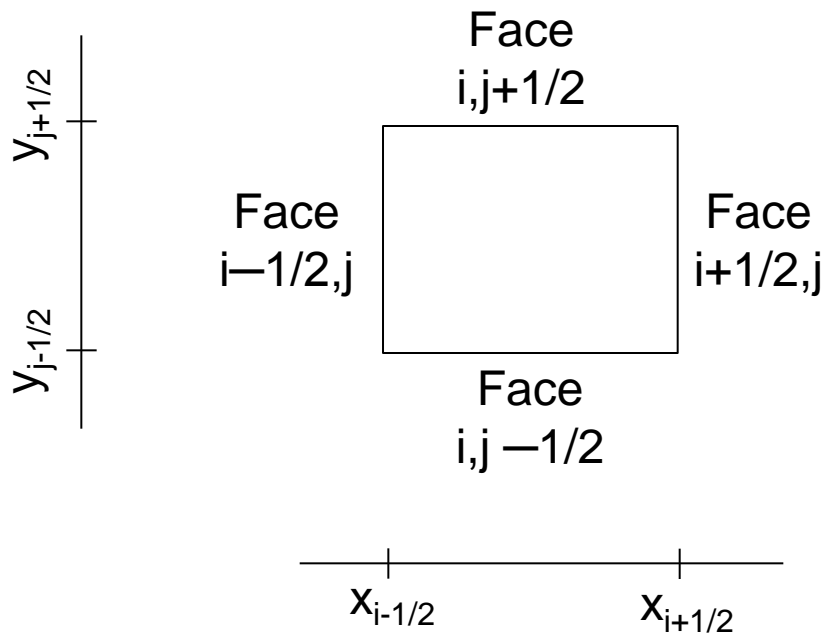


- Considere a célula interior centrada em (x_i, y_j)



MVF – Caso Incompressível 2D e 3D

- Obs.: mudança de notação para as dimensões das células
- As células são retangulares com quatro faces



- Integrando a EDP na célula centrada (x_i, y_j) :

$$-\int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial p}{\partial x} \right) dx dy - \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial p}{\partial y} \right) dy dx = \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} q_m dx dy$$

⇓

$$-\int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} k_x \left(x_{i+\frac{1}{2}}, y \right) \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{\left(x_{i+\frac{1}{2}}, y \right)} dy + \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} k_x \left(x_{i-\frac{1}{2}}, y \right) \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{\left(x_{i-\frac{1}{2}}, y \right)} dy +$$

Fluxo através
da face i+1/2,j

Fluxo através
da face i-1/2,j

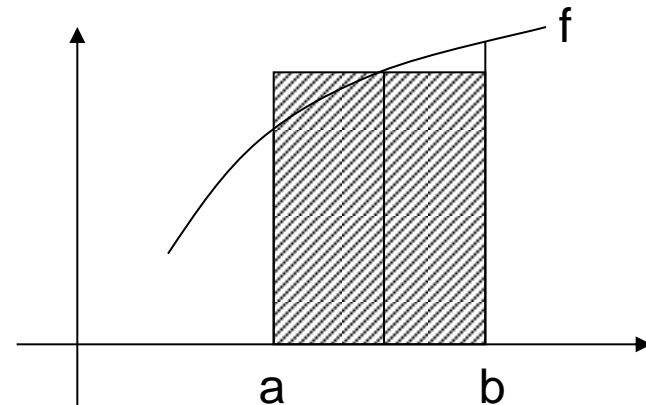
$$-\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} k_y \left(x, y_{i+\frac{1}{2}} \right) \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{\left(x, y_{i+\frac{1}{2}} \right)} dx + \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} k_y \left(x, y_{i-\frac{1}{2}} \right) \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{\left(x, y_{i-\frac{1}{2}} \right)} dx = \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} q_m dx dy$$

Fluxo através
da face i,j+1/2

Fluxo através
da face i,j-1/2

- Integrais aproximadas pela regra do ponto médio:

$$\int_a^b f(\alpha) d\alpha = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$



$$-\Delta y_j k_x \left(x_{i+\frac{1}{2}}, y_j \right) \frac{\partial p}{\partial x} \Bigg|_{\left(x_{i+\frac{1}{2}}, y_j \right)} + \Delta y_j k_x \left(x_{i-\frac{1}{2}}, y_j \right) \frac{\partial p}{\partial x} \Bigg|_{\left(x_{i-\frac{1}{2}}, y_j \right)} +$$

$$-\Delta x_i k_y \left(x_i, y_{i+\frac{1}{2}} \right) \frac{\partial p}{\partial y} \Bigg|_{\left(x_i, y_{i+\frac{1}{2}} \right)} + \Delta x_i k_y \left(x_i, y_{i-\frac{1}{2}} \right) \frac{\partial p}{\partial y} \Bigg|_{\left(x_i, y_{i-\frac{1}{2}} \right)} = \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} q_m dx dy$$

- k_x e k_y são aproximados pela média harmônica:

$$k_{x_{i+1/2,j}} = \frac{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}}{\frac{\Delta x_i}{k_{x_i}} + \frac{\Delta x_{i+1}}{k_{x_{i+1}}}} \quad k_{y_{i,j+1/2}} = \frac{\Delta y_j + \Delta y_{j+1}}{\frac{\Delta y_j}{k_{y_j}} + \frac{\Delta y_{j+1}}{k_{y_{j+1}}}}$$

- Aproximação para as derivadas de p :

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{(x_{i+1/2}, y_j)} \approx \frac{p_{i+1,j} - p_{ij}}{x_{i+1,j} - x_{ij}} = \frac{p_{i+1,j} - p_{ij}}{\frac{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}}{2}}$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{(x_i, y_{j+1/2})} \approx \frac{p_{i,j+1} - p_{ij}}{x_{i,j+1} - x_{ij}} = \frac{p_{i,j+1} - p_{ij}}{\frac{\Delta y_j + \Delta y_{j+1}}{2}}$$

MVF – Caso Incompressível 2D e 3D

- A aproximação para o fluxo na face $(x_{i+1/2}, y_j)$ fica

$$\int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} k_x \left(x_{i+\frac{1}{2}}, y \right) \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{\left(x_{i+\frac{1}{2}}, y \right)} dy \approx \Delta y_j \frac{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}}{\frac{\Delta x_i}{k_{x_{ij}}} + \frac{\Delta x_{i+1}}{k_{x_{i+1,j}}}} \frac{p_{i+1,j} - p_{ij}}{2} =$$

$$= \frac{2\Delta y_j k_{x_i} k_{x_{i+1}}}{\Delta x_i k_{x_{i+1,j}} + \Delta x_{i+1} k_{x_{ij}}} (p_{i+1,j} - p_{ij}) = T_{i+1/2,j} (p_{i+1,j} - p_{ij})$$

$$T_{i+1/2,j} = \frac{2\Delta y_j k_{x_{ij}} k_{x_{i+1,j}}}{\Delta x_i k_{x_{i+1,j}} + \Delta x_{i+1} k_{x_{ij}}}$$

Transmissibilidade na direção X
(depende da geometria da malha
e das propriedades do meio)

MVF – Caso Incompressível 2D e 3D

- A aproximação para o fluxo na face $(x_i, y_{j+1/2})$ fica

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} k_y \left(x, y_{j+1/2} \right) \frac{\partial p}{\partial y} \bigg|_{\left(x, y_{j+1/2} \right)} dx \approx \Delta x_i \frac{\Delta y_j + \Delta y_{j+1}}{\frac{\Delta y_j}{k_{y_{ij}}} + \frac{\Delta y_{j+1}}{k_{y_{i,j+1}}}} \frac{p_{i,j+1} - p_{ij}}{2} =$$

$$= \frac{2\Delta x_i k_{y_{ij}} k_{y_{i,j+1}}}{\Delta y_j k_{y_{i,j+1}} + \Delta y_{j+1} k_{y_{ij}}} (p_{i,j+1} - p_{ij}) = T_{i,j+1/2} (p_{i,j+1} - p_{ij})$$

$$T_{i,j+1/2} = \frac{2\Delta x_i k_{y_{ij}} k_{y_{i,j+1}}}{\Delta y_j k_{y_{i,j+1}} + \Delta y_{j+1} k_{y_{ij}}}$$

Transmissibilidade na direção Y
(depende da geometria da malha
e das propriedades do meio)

MVF – Caso Incompressível 2D e 3D

- Para o caso 2D com espessura constante, o termo fonte q_m corresponde à vazão mássica específica dada em termos de vazão mássica por unidade de área
- Assim, o termo

$$Q_{m_{ij}} = \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} q_m dx dy$$

corresponde à vazão mássica (massa/tempo) que iremos assumir especificada (corresponde à vazão dos poços de injeção ou produção)

MVF – Caso Incompressível 2D e 3D

- Em geral, a vazão volumétrica em condições padrão (de superfície) Q_{sc} é especificada
- Para o problema incompressível, a densidade é constante e não precisamos nos preocupar em converter de condições de reservatório para padrão e temos simplesmente que

$$Q_{m_{ij}} = \rho Q_{sc}$$

- Calcular a pressão de fluxo nos poços é um problema relevante que será tratado mais adiante

MVF – Caso Incompressível 2D e 3D

- Considerando as quatro faces da célula em (x_i, y_j) :

$$-T_{i+1/2,j} (p_{i+1,j} - p_{ij}) + T_{i-1/2,j} (p_{ij} - p_{i-1,j}) - \\ T_{i,j+1/2} (p_{i,j+1} - p_{ij}) + T_{i,j-1/2} (p_{ij} - p_{i,j-1}) = Q_{m_{ij}}$$

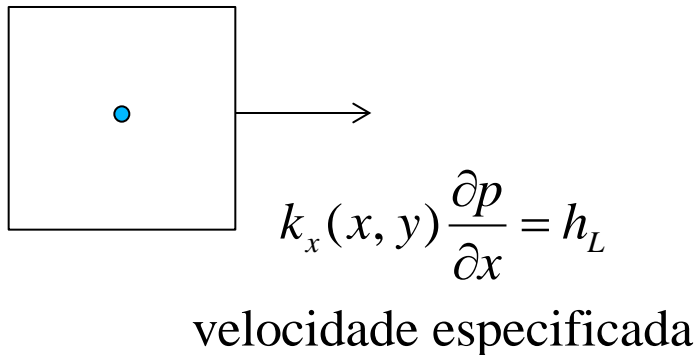
⇓

$$-T_{i+1/2,j} p_{i+1,j} - T_{i-1/2,j} p_{i-1,j} - T_{i,j+1/2} p_{i,j+1} - T_{i,j-1/2} p_{i,j-1} + \Sigma_{ij} p_{ij} = Q_{m_{ij}}$$

$$\Sigma_{ij} = T_{i+1/2,j} + T_{i-1/2,j} + T_{i,j+1/2} + T_{i,j-1/2}$$

MVF – Caso Incompressível 2D e 3D

- Para as células na fronteira os fluxos nas faces externas devem ser adaptados
- Por exemplo, para uma célula na fronteira leste (x_n, y_j) , a velocidade na face $(x_{i+1/2}, y_j)$ é especificada



Cálculo do fluxo:

$$\int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} k_x \left(x_{n+\frac{1}{2}}, y \right) \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{\left(x_{n+\frac{1}{2}}, y \right)} dy = \Delta y_j h_L$$

MVF – Caso Incompressível 2D e 3D

- Nas demais faces, o cálculo é idêntico ao anterior e equação para a célula (x_n, y_j) , $2 \leq j \leq n-1$, fica

$$-\Delta y_j h_L + T_{n-1/2,j} (p_{nj} - p_{n-1,j}) - \\ T_{n,j+1/2} (p_{n,j+1} - p_{nj}) + T_{n,j-1/2} (p_{nj} - p_{n,j-1}) = Q_{m_{nj}}$$

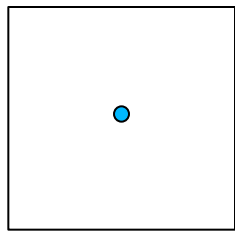
⇓

$$-T_{n-1/2,j} p_{n-1,j} - T_{n,j+1/2} p_{n,j+1} - T_{n,j-1/2} p_{n,j-1} + \Sigma_{nj} p_{nj} = Q_{m_{nj}} + \Delta y_j h_L$$

$$\Sigma_{ij} = T_{i,j-1/2} + T_{i,j+1/2} + T_{i,j-1/2}$$

MVF – Caso Incompressível 2D e 3D

- Para uma célula na fronteira sul (x_i, y_1) , o valor de p na face $(x_i, y_{1/2})$ é especificado e o fluxo tem que ser aproximado usando esse valor



$$p = g_s$$

valor especificado

Cálculo do fluxo:

$$\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} k_y \left(x, y_{\frac{1}{2}} \right) \frac{\partial p}{\partial y} \bigg|_{\left(x, y_{\frac{1}{2}} \right)} dx \approx \Delta x_i k_{y_{i1}} \frac{p_{i1} - g_s}{\frac{\Delta y_1}{2}} =$$
$$= \frac{2\Delta x_i k_{y_{i1}}}{\Delta y_1} (p_{i1} - g_s) = T_{i,1/2} (p_{i1} - g_s)$$

MVF – Caso Incompressível 2D e 3D

- Nas demais faces, o cálculo é idêntico ao anterior e equação para a célula (x_i, y_1) , $2 \leq i \leq n-1$, fica

$$-T_{i+1/2,1} (p_{i+1,1} - p_{i1}) + T_{i-1/2,1} (p_{i1} - p_{i-1,1}) - \\ T_{i,3/2} (p_{i2} - p_{i1}) + T_{i,1/2} (p_{i1} - g_S) = Q_{m_{i1}}$$

⇓

$$-T_{i+1/2,1} p_{i+1,1} - T_{i-1/2,1} p_{i-1,1} - T_{i,3/2} p_{i2} + \Sigma_{i1} p_{ij} = Q_{m_{i1}} + T_{i,1/2} g_S$$

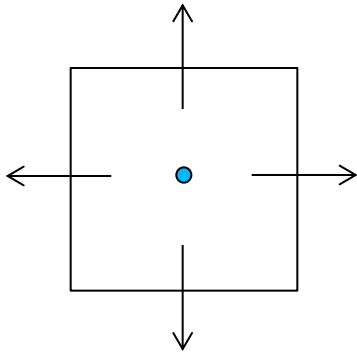
$$\Sigma_{i1} = T_{i+1/2,1} + T_{i-1/2,1} + T_{i,3/2} + T_{i,1/2}$$

MVF – Caso Incompressível 2D e 3D

- Cada célula da malha resulta em uma equação linear, ou seja, os valores de p nas células da malha são determinados por um sistema linear de ordem nm
- Um argumento baseado no princípio de máximo inteiramente similar ao caso unidimensional pode ser utilizado para mostrar que o sistema é não-singular
- Essencialmente, dada a estrutura da discretização um máximo no interior indicaria retirada de massa pelas fronteiras da célula

MVF – Caso Incompressível 2D e 3D

$$T_{i+1/2,j} (p_{ij} - p_{i+1,j}) + T_{i-1/2,j} (p_{ij} - p_{i-1,j}) + \\ T_{i,j+1/2} (p_{ij} - p_{i,j+1}) + T_{i,j-1/2} (p_{ij} - p_{i,j-1}) = Q_{m_{ij}}$$



Um máximo em p_{ij} , significaria retirada de massa por todas as fronteiras, o que é incompatível com $Q_{m_{ij}} < 0$ (fonte retirando massa)

- Para analisar a estrutura deste sistema é necessário associar uma numeração sequencial às células da malha

Numeração natural

| | | | |
|----|----|----|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 |
| 9 | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 14 | 15 | 16 |

Equação de balanço para célula 6 depende de u nas células 2, 5, 6, 7, 10

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | x | | | x | | | | | | | | | | | | | | | |
| x | x | x | | | | | | x | | | | | | | | | | | |
| | x | x | x | | | | | | | | | | x | | | | | | |
| | | x | x | | | | | | | | | | | x | | | | | |
| x | | | | | | | | x | x | | | | | | x | | | | |
| | x | | | | | | | x | x | x | | | | | x | | | | |
| | | x | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | x | | | | | | | x | x | | | | | | | | |
| | | | | x | | | | | | x | x | x | | | | | | | |
| | | | | | x | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | x | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | x | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | x | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | x | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | x | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | x | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | x | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | x | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | x | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | x | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | x | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | x | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | x | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | x |

Matriz pentadiagonal

MVF – Caso Incompressível 2D e 3D

Numeração natural

| | | | |
|----|----|----|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 |
| 9 | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 14 | 15 | 16 |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | x | | | x | | | | | | | | | | | | | | | |
| x | x | x | | | | | | x | | | | | | | | | | | |
| | x | x | x | | | | | | | | | | x | | | | | | |
| | | x | x | | | | | | | | | | | | | | | | |
| x | | | | | | | | x | x | | | | | | | | | | |
| | x | | | | | | | x | x | x | | | | | | | | | |
| | | x | | | | | | | | x | x | | | | | | | | |
| | | | x | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | x | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | x | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | x | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | x | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | x | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | x | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | x | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | x | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | x | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | x | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | x | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | x | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | x | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | x | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | x | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | x |

Matriz pentadiagonal

MVF – Caso Incompressível 2D e 3D

- Como no caso 1D, expansão em série de Taylor revela que o erro de truncamento E_T contém termos $O(1)$, $O(h)$ e $O(h^2)$ impedindo uma demonstração direta da convergência
- No entanto, da mesma forma que no caso 1D, é possível isolar componentes $O(h^2)$ do erro que geram os termos $O(1)$ e $O(h)$ de E_T e a solução aproximada converge para a solução exata com erro $O(h^2)$ (mesmo para malha não uniforme e coeficientes variáveis)

MVF – Caso Incompressível 2D e 3D

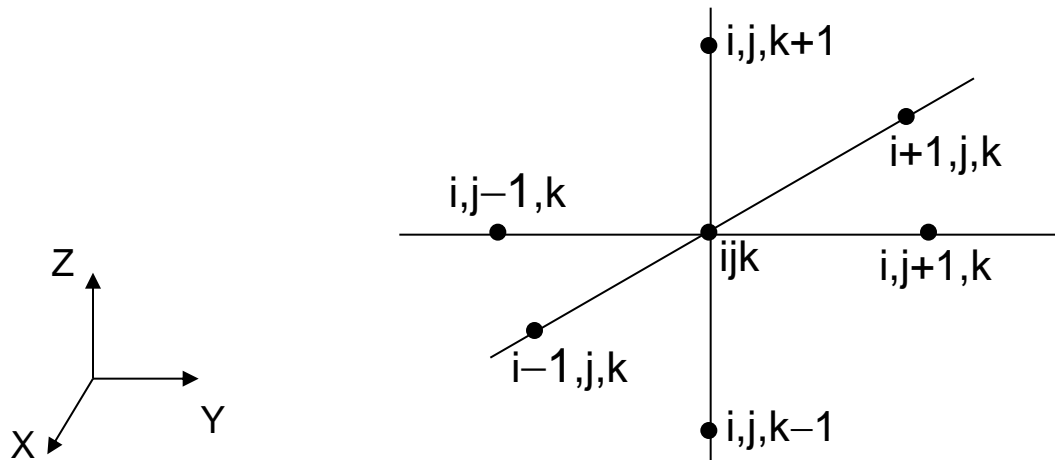
- Vamos considerar o problema em 3D

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial p}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial p}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial p}{\partial z} \right) = q_m$$

- Como no caso 2D, condições de fronteira de Dirichlet ou Neumann devem ser especificadas

MVF – Caso Incompressível 2D e 3D

- No caso 3D é necessário considerar a célula centrada em (x_i, y_j, z_k) e seis vizinhos



- Integração volumétrica e aproximações semelhantes ao caso bidimensional (média harmônica, etc) resultam em

$$\begin{aligned}
 & -T_{i+1/2,j,k} (p_{i+1,j,k} - p_{ijk}) + T_{i-1/2,j,k} (p_{ijk} - p_{i-1,j,k}) - \\
 & T_{i,j+1/2,k} (p_{i,j+1,k} - p_{ijk}) + T_{i,j-1/2,k} (p_{ijk} - p_{i,j-1,k}) - \\
 & T_{i,j,k+1/2} (p_{i,j,k+1} - p_{ijk}) + T_{i,j,k-1/2} (p_{ijk} - p_{i,j,k-1}) = Q_{m_{ijk}}
 \end{aligned}$$

⇓

$$\begin{aligned}
 & -T_{i+1/2,j,k} p_{i+1,j,k} - T_{i-1/2,j,k} p_{i-1,j,k} - T_{i,j+1/2,k} p_{i,j+1,k} - T_{i,j-1/2,k} p_{i,j-1,k} - \\
 & T_{i,j,k+1/2} p_{i,j,k+1} - T_{i,j,k-1/2} p_{i,j,k-1} + \Sigma_{ijk} p_{ijk} = Q_{m_{ijk}}
 \end{aligned}$$

$$\Sigma_{ijk} = T_{i+1/2,j,k} + T_{i-1/2,j,k} + T_{i,j+1/2,k} + T_{i,j-1/2,k} + T_{i,j,k+1/2} + T_{i,j,k-1/2}$$

- Transmissibilidades nas direções X, Y e Z

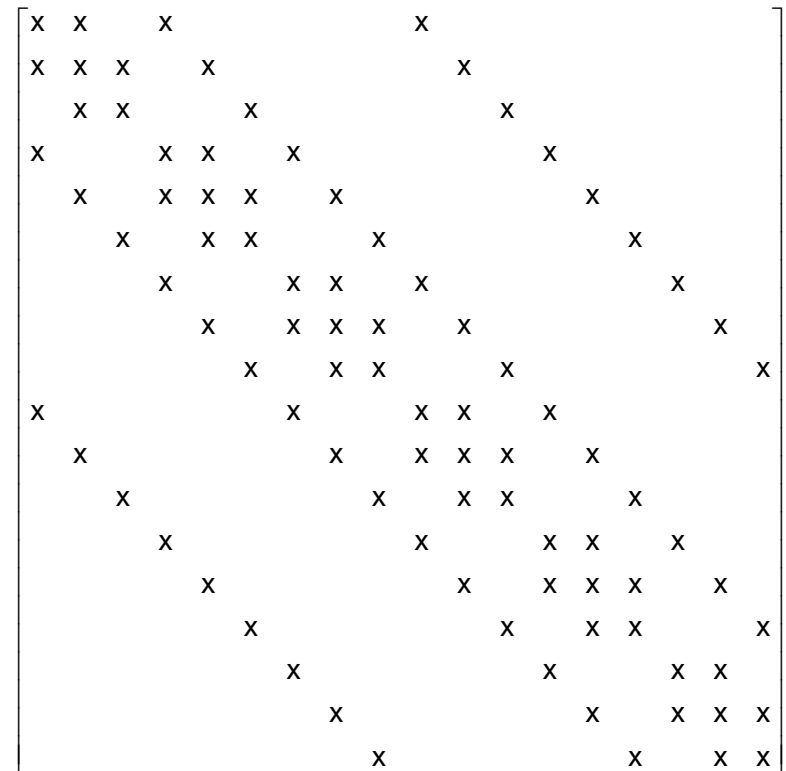
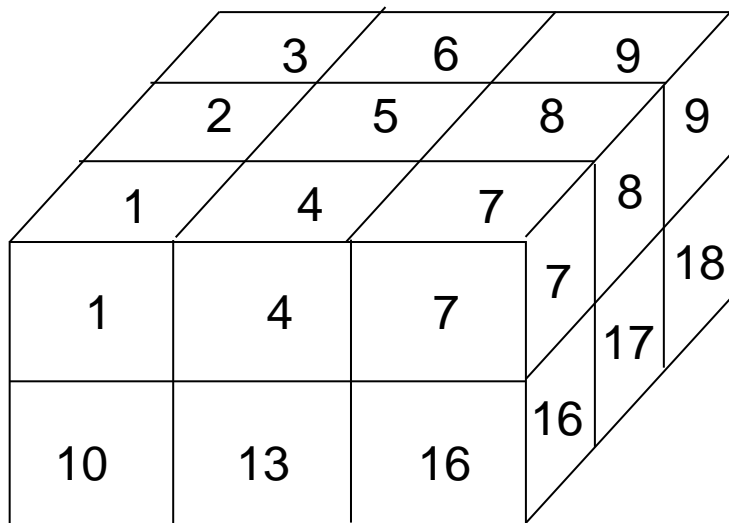
$$T_{i+1/2,j,k} = \frac{2\Delta y_j \Delta z_k k_{x_{ijk}} k_{x_{i+1,j,k}}}{\Delta x_i k_{x_{i+1,j,k}} + \Delta x_{i+1} k_{x_{ijk}}}$$

$$T_{i,j+1/2,k} = \frac{2\Delta x_i \Delta z_k k_{y_{ijk}} k_{y_{i,j+1,k}}}{\Delta y_j k_{y_{i,j+1,k}} + \Delta y_{j+1} k_{y_{ijk}}}$$

$$T_{i,j,k+1/2} = \frac{2\Delta x_i \Delta y_j k_{z_{ijk}} k_{z_{i,j,k+1}}}{\Delta z_k k_{z_{i,j,k+1}} + \Delta z_{k+1} k_{z_{ijk}}}$$

- O tratamento das condições de fronteira é similar aos casos anteriores

- A equação de cada célula envolve apenas o valor de u na própria célula e nos seis vizinhos mais próximos
- Considerando a numeração natural para os nós resulta em uma matriz heptadiagonal



MVF – Caso Incompressível 2D e 3D

- A geometria dos reservatórios de petróleo é definida por heterogeneidades internas determinadas pelas características das formações geológicas
- Reservatórios de petróleo típicos seguem camadas estratigráficas inclinadas que podem se colapsar em pinch-outs e também se separar devido à presença de falhas
- As fronteiras externas também devem ser representadas corretamente de forma a permitir um cálculo suficientemente preciso do volume (os detalhes geométricos não são tão importantes)

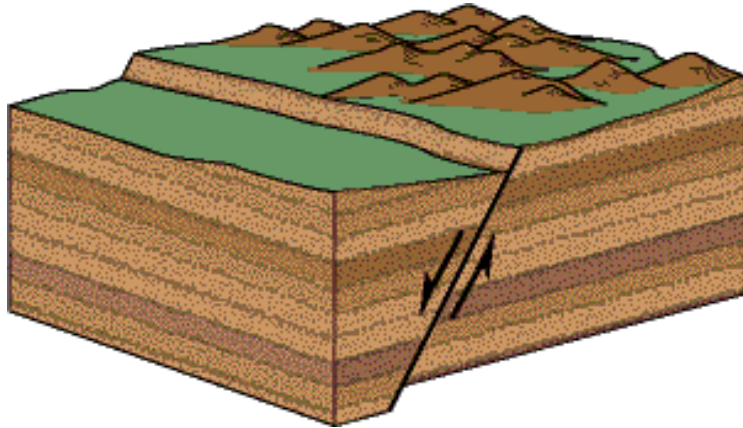


Ilustração de uma falha

Fonte: U.S. Geological Survey
Department of the Interior/USGS
<http://geomaps.wr.usgs.gov/parks/deform/gfaults.html>
(visitado em 8/1/2015)

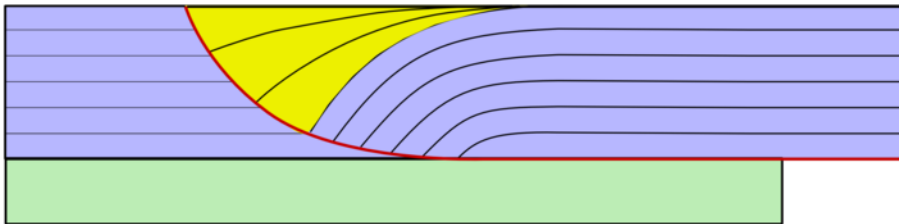


Ilustração de um pinch-out

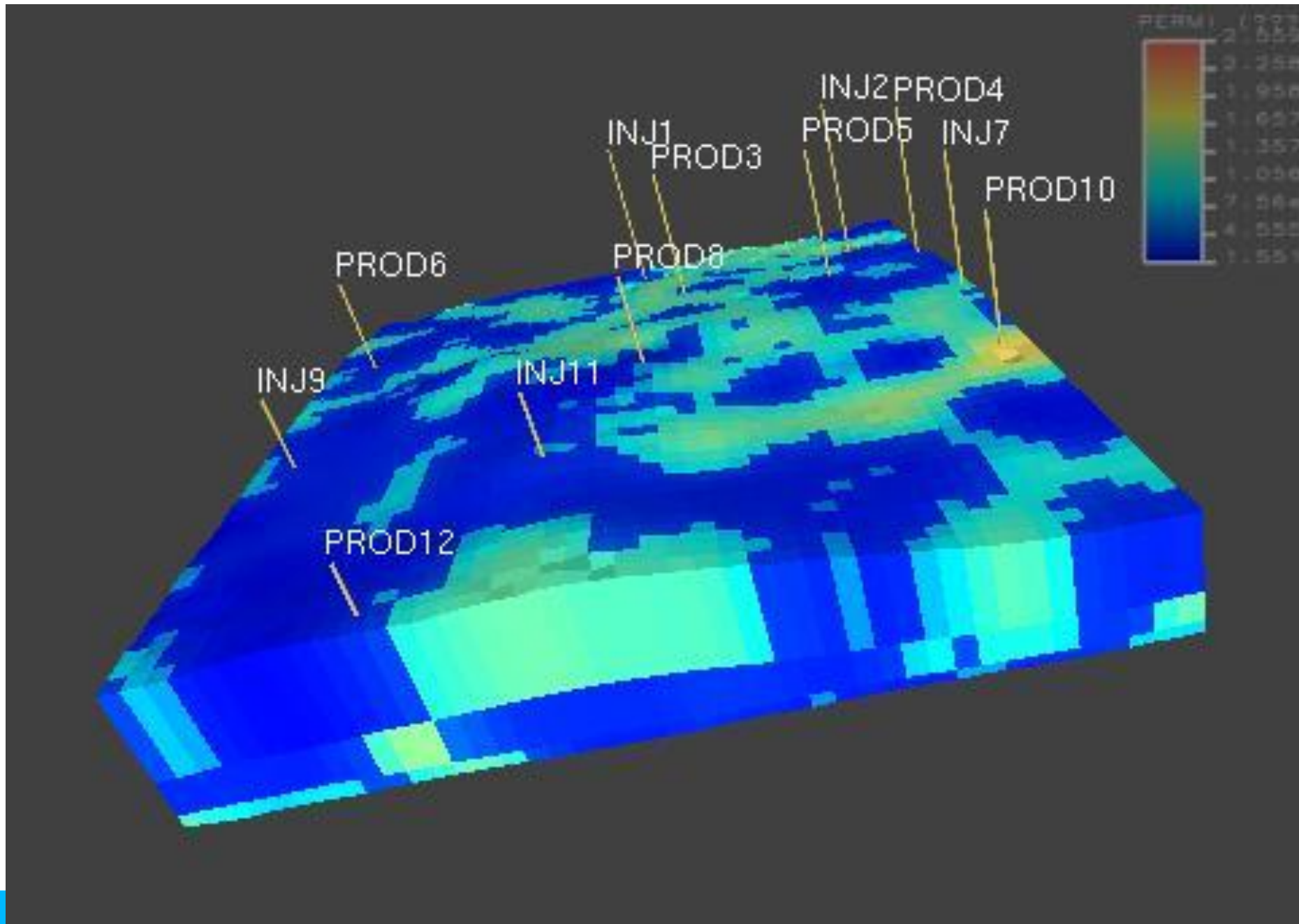
Fonte
<http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Rollover.png>
Autor: Mikenorton
(visitado em 8/1/2015)

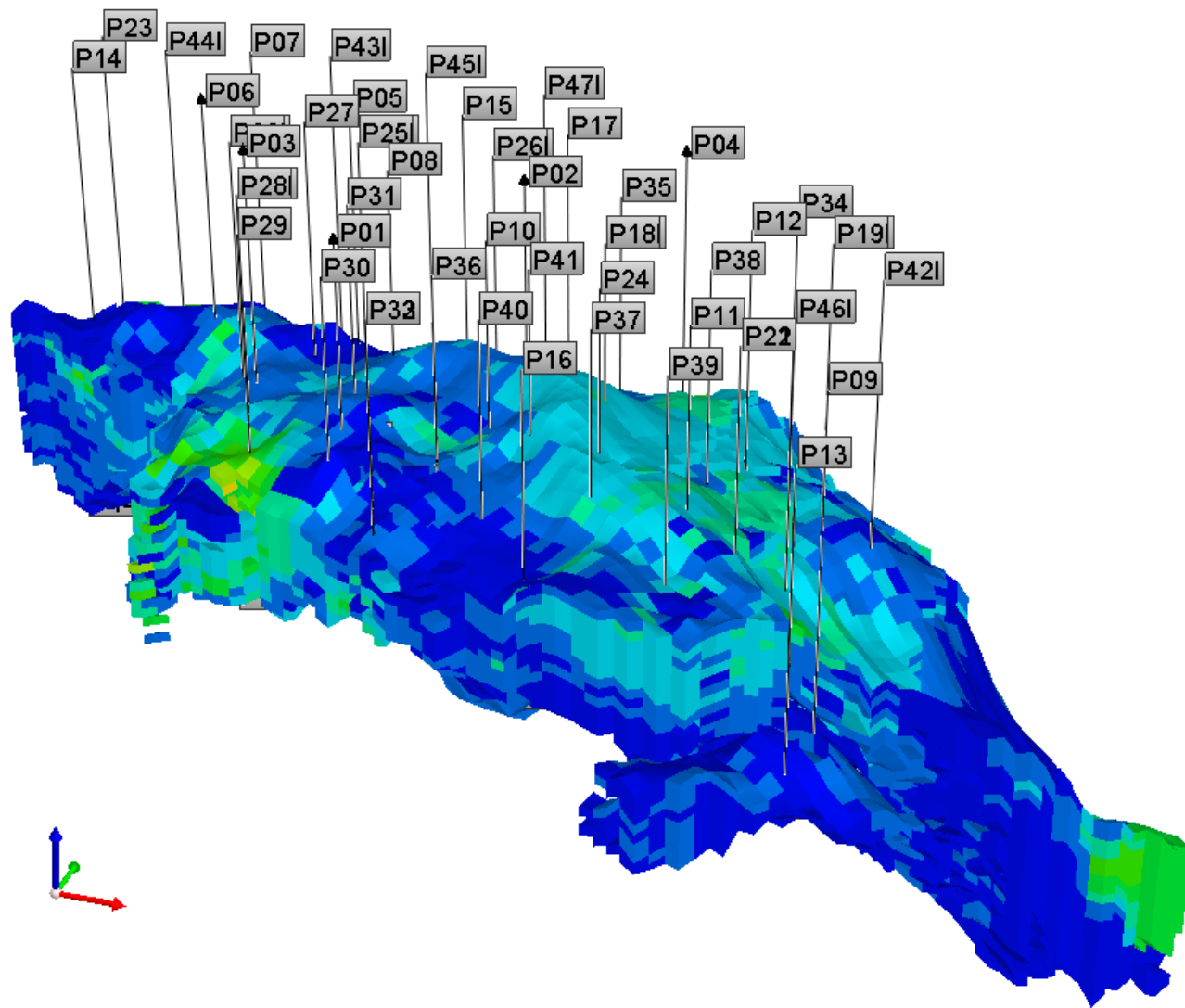
MVF – Caso Incompressível 2D e 3D

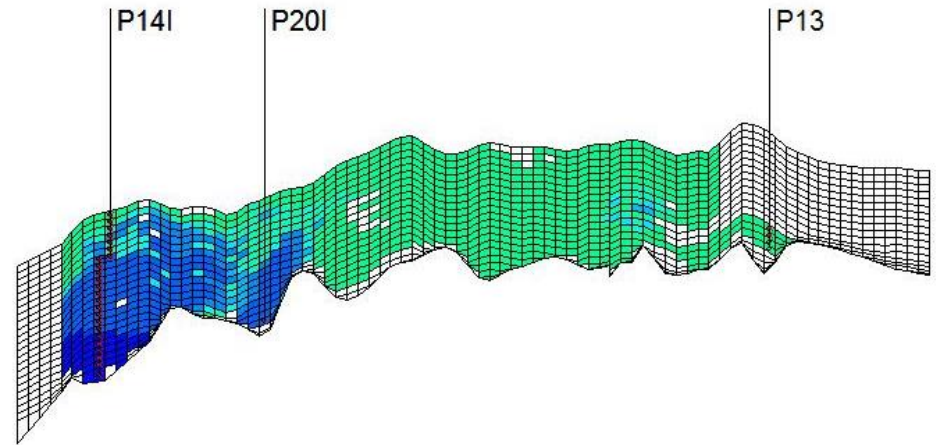
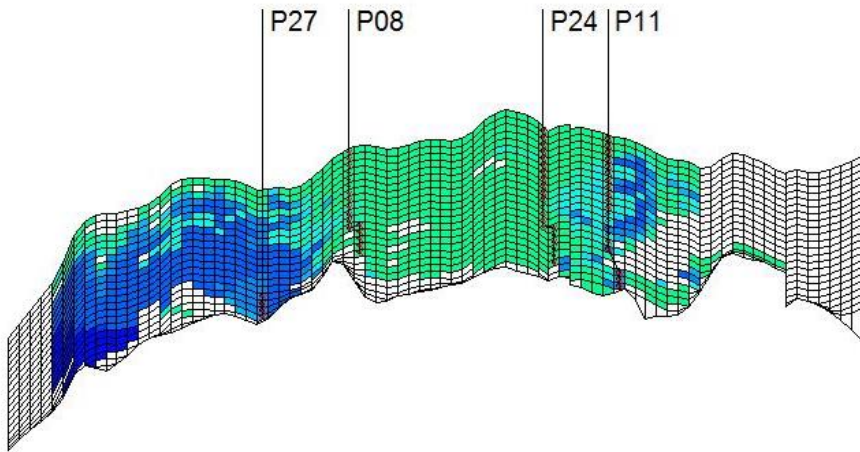
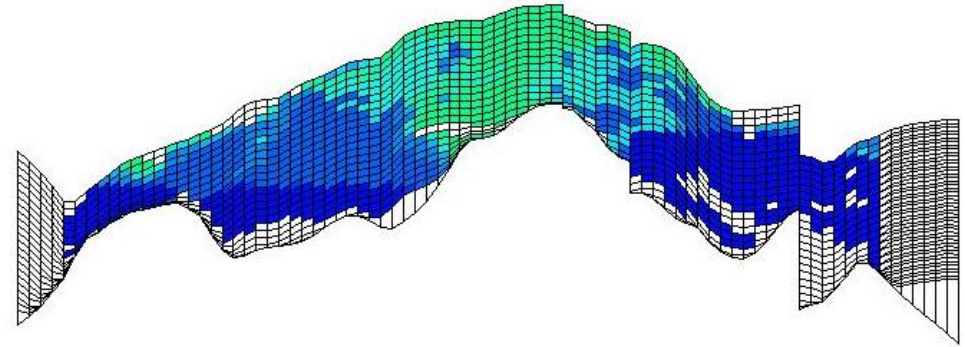
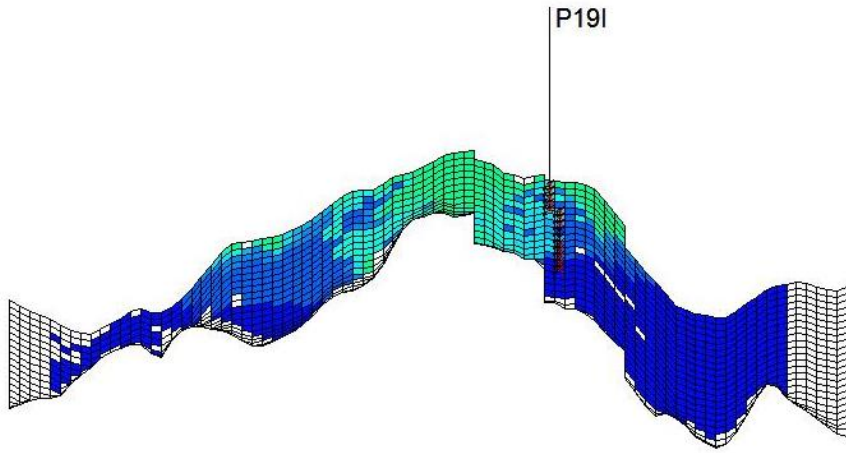
- É claro que uma malha cartesiana simples não é capaz de descrever adequadamente um domínio com essa complexidade, incluindo interfaces internas separando regiões com propriedades petrofísicas muito diferentes
- As malhas mais utilizadas em simulação de reservatórios são generalizações da malha cartesiana
- Malhas não estruturadas também receberam bastante atenção na literatura mas são menos utilizadas na indústria

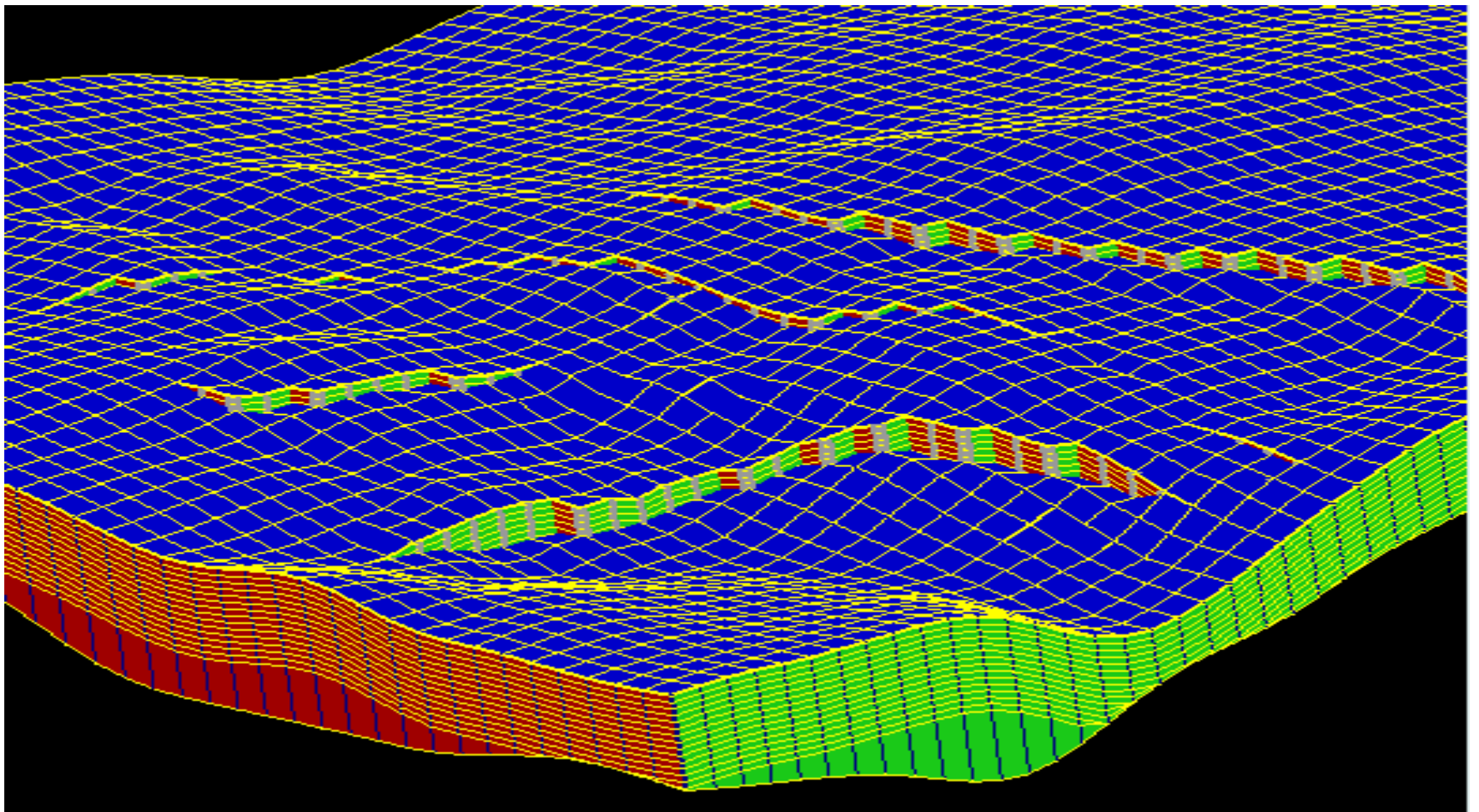
MVF – Caso Incompressível 2D e 3D

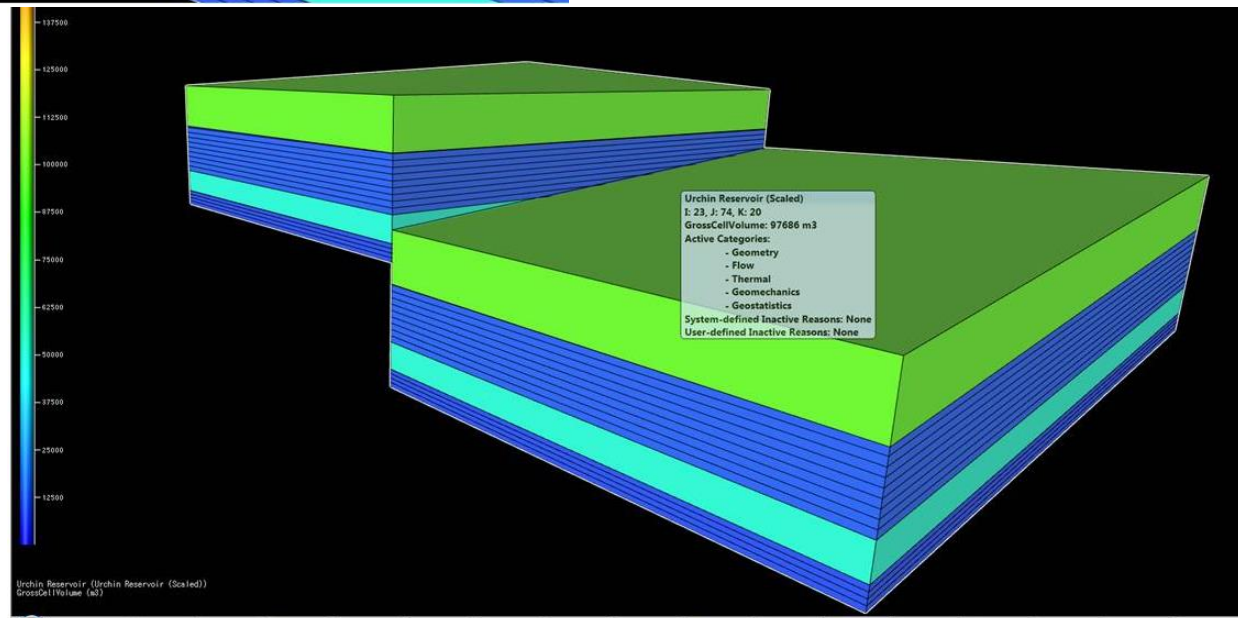
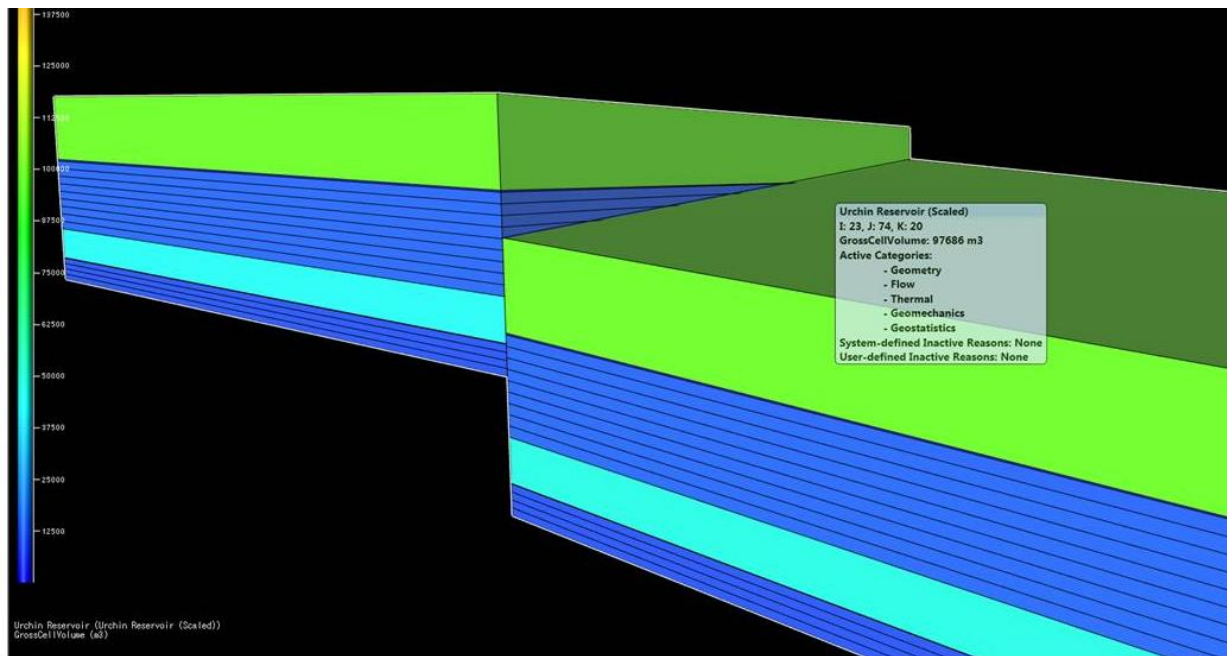
- Além disso, por questão de precisão da solução, pode ser importante considerar malhas que sejam refinadas em regiões onde seja necessário representar bem características da solução, particularmente junto aos poços
- Discretizações em malhas complexas é um tema avançado e sob muitos aspectos ainda em desenvolvimento
- Será apresentada uma exposição superficial de alguns aspectos do tema







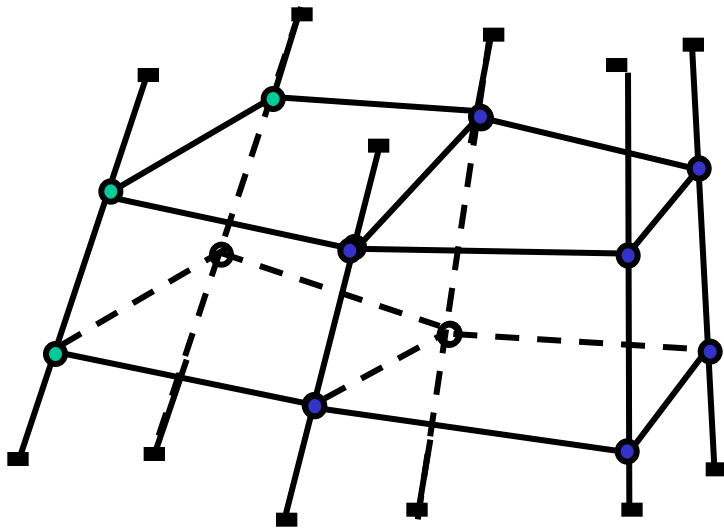




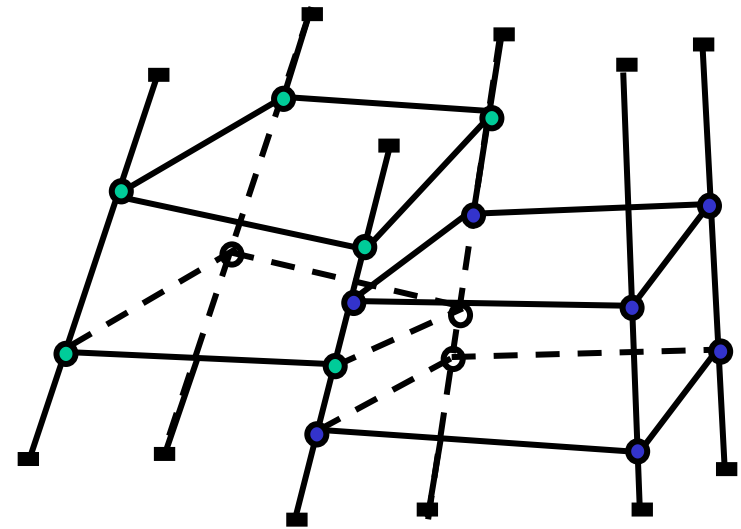
MVF – Caso Incompressível 2D e 3D

- As malhas chamadas de “corner point” são as mais comumente utilizadas na indústria
- Trata-se de uma malha hexaédrica onde cada célula é definida por seus oito vértices
- A especificação independente dos vértices em células vizinhas, permite representar os deslocamentos entre blocos do reservatório que aparecem nas falhas geológicas (“rejeito”)
- As células continuam identificadas por coordenadas ijk (“logicamente retangulares”)

MVF – Caso Incompressível 2D e 3D



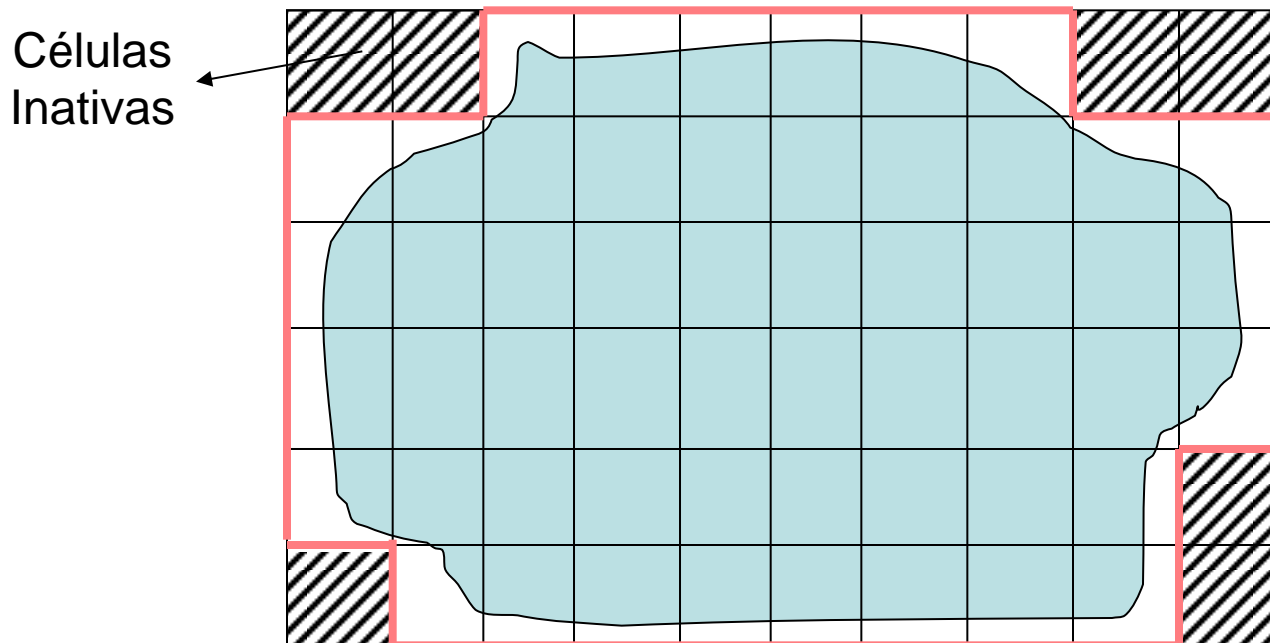
Detalhe da conexão entre duas células na malha corner point com faces coincidentes



Detalhe da conexão entre duas células na malha corner point na presença de uma falha

MVF – Caso Incompressível 2D e 3D

- As fronteiras externas são representadas de forma simples, embora imprecisa, utilizando malhas “dente de serra”, através da introdução de células inativas

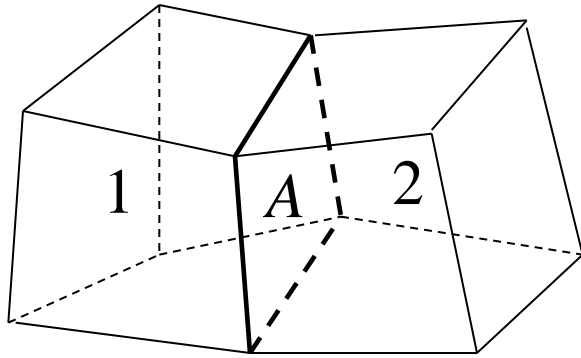


MVF – Caso Incompressível 2D e 3D

- A abordagem utilizada nos simuladores de reservatórios comerciais é aplicar o MVF de forma semelhante ao descrito para malhas cartesianas gerando esquemas de sete pontos em 3D
- O conceito de transmissibilidade é generalizado, adaptando o cálculo da área das faces e da distância entre os centros das células para a geometria distorcida
- Para muitos casos, esta é uma abordagem aceitável do ponto-de-vista de engenharia

MVF – Caso Incompressível 2D e 3D

- Transmissibilidade entre as células 1 e 2:



$$T_{12} = \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right)^{-1} \quad (\text{m\u00e9dia harm\u00f4nica})$$

$$T_i = k_i \frac{A |\mathbf{d}_i \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{d}_i \cdot \mathbf{d}_i|}$$

A = \u00e1rea da face comum \u00e0s duas c\u00e9lulas

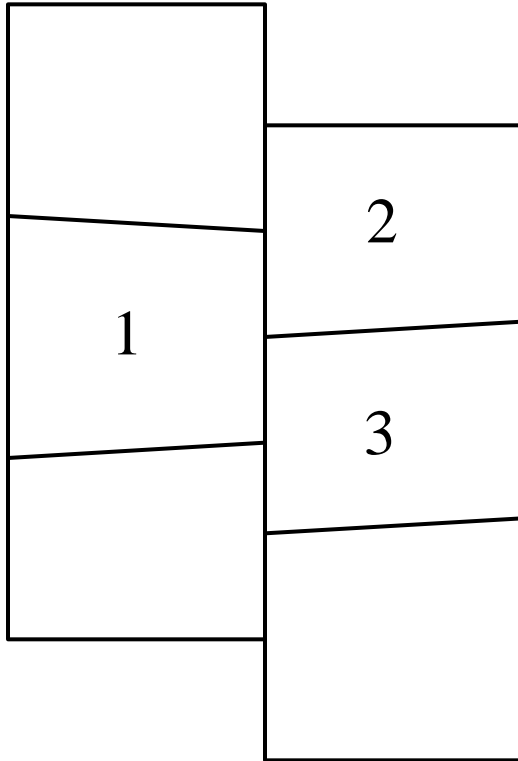
\mathbf{n} = vetor normal unit\u00e1rio \u00e0 face comum \u00e0s duas c\u00e9lulas

\mathbf{d}_i = vetor ligando o centro das c\u00e9lulas ao centro da face
que contribui para a face comum

MVF – Caso Incompressível 2D e 3D

- Note que em geral as faces das células não são planas
- Assume-se que são representadas por funções bilineares para o cálculo de áreas e volumes
- Nas falhas todas as contribuições de células em que haja área de contato comum são consideradas
- Conexões fora das diagonais obtidas pela discretização em malhas cartesianas aparecem

MVF – Caso Incompressível 2D e 3D

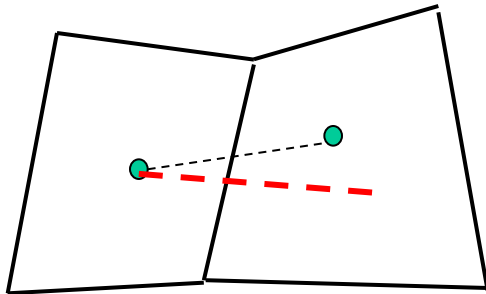


Célula 1 conecta-se com as células 2 e 3

MVF – Caso Incompressível 2D e 3D

- Quando o segmento ligando os centros das células não são ortogonais à face da célula, erros $O(1)$ nos fluxos podem aparecer quando os cálculos dos fluxos são baseados em uma aproximação de dois pontos (TPFA)

MVF – Caso Incompressível 2D e 3D



A figura ao lado indica que uma aproximação consistente do fluxo na interface deveria considerar o valor de pressão em algum ponto ao longo da linha vermelha

- Para tanto, seria necessária alguma forma de interpolação do valor nas células vizinhas, gerando um cálculo de fluxos envolvendo pontos adicionais além dos centros das células que definem a face

MVF – Caso Incompressível 2D e 3D

- Métodos de aproximação dos fluxos por múltiplos pontos (MPFA) receberam grande atenção na literatura nas últimas duas décadas e ainda continuam uma área de pesquisa muito ativa
- A dificuldade está em obter discretizações que possuam todas as propriedades de simetria, monotonicidade (princípio de máximo), convergência, etc desejadas
- Também é altamente desejável que os métodos sejam fáceis de implementar nos simuladores comerciais existentes baseados em TPFA

MVF – Caso Incompressível 2D e 3D

- Para ilustrar os princípios, vamos apresentar um método MPFA específico
- O método tenta generalizar as ideias que justificam o uso de médias harmônicas no caso 1D, assumindo perfil linear de pressão nas células e impondo condições de continuidade de pressão e velocidade nas faces

MVF – Caso Incompressível 2D e 3D

- A apresentação cobrirá apenas o caso 2D e é baseada (incluindo algumas figuras) em
 - Aavatsmark, An introduction to multipoint flux approximations for quadrilateral grids, *Computational Geosciences*, 2002
- O ponto de partida é definir uma malha dual ligando os centros das células aos pontos médios das faces

MVF – Caso Incompressível 2D e 3D

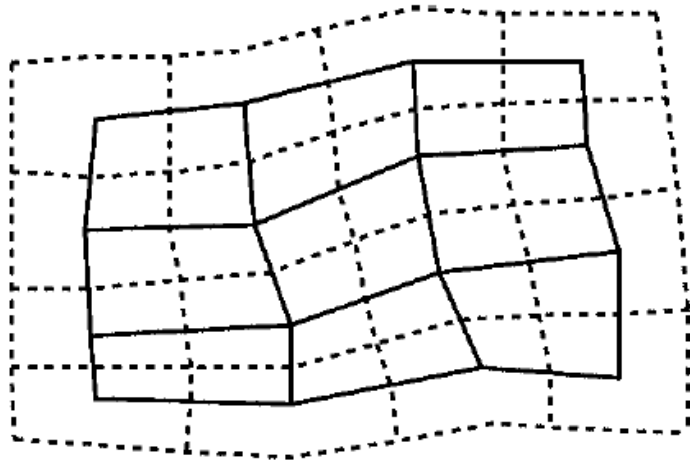


Fig. 3 de Aavatsmark, *Comp. Geos.*, 2002

- As células da malha correspondem aos quadriláteros de linha sólida
- Em cada célula assume-se uma distribuição linear da pressão
- As linhas tracejadas dividem cada face em duas subfaces onde a continuidade de fluxo será imposta
- Continuidade de pressão será imposta nos pontos médios das faces

MVF – Caso Incompressível 2D e 3D

- Expressão para o fluxo por uma subface i em uma célula j :

$$f_i = -\mathbf{K}_j \nabla p_j \cdot \mathbf{n}_i, \quad |\mathbf{n}_i| = \text{comprimento da subface } i$$

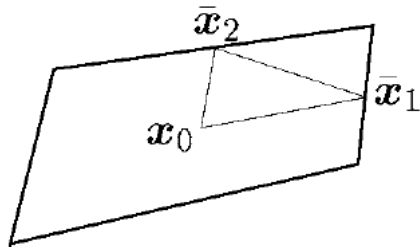
- Assumindo linearidade, a expressão para a pressão na célula é dada por (omitindo o subscrito j da célula):

$$p(\mathbf{x}) = \nabla p \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + p_0$$

\mathbf{x}_0 = coordenada do centro da célula

p_0 = valor de p em \mathbf{x}_0

- Para determinar as componentes do gradiente, utilizam-se pontos auxiliares nos pontos médios das faces, gerando um sistema linear 2 x 2



$$\bar{p}_1 - p_0 = \nabla p \cdot (\bar{\mathbf{x}}_1 - \mathbf{x}_0)$$

$$\bar{p}_2 - p_0 = \nabla p \cdot (\bar{\mathbf{x}}_2 - \mathbf{x}_0)$$

Fig. 5a de Aavatsmark, *Comp. Geos.*, 2002

$$\nabla p = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_1 - \mathbf{x}_0 \\ \bar{\mathbf{x}}_2 - \mathbf{x}_0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{p}_1 - p_0 \\ \bar{p}_2 - p_0 \end{bmatrix} = (\bar{p}_1 - p_0) \mathbf{v}_1 + (\bar{p}_2 - p_0) \mathbf{v}_2$$

\mathbf{v}_k = coluna k da inversa (só depende da geometria da célula)

MVF – Caso Incompressível 2D e 3D

- Substituindo na expressão para o fluxo da subface i da célula j :

$$f_i = -\mathbf{K}_j \nabla p_j \cdot \mathbf{n}_i = -(\bar{p}_1 - p_0) \mathbf{K}_j \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n}_i - (\bar{p}_2 - p_0) \mathbf{K}_j \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n}_i = \sum_{k=1}^2 \omega_{ijk} (\bar{p}_k - p_0)$$

- Essa é a expressão que será usada para impor continuidade de fluxo nas subfaces de uma célula da malha dual

MVF – Caso Incompressível 2D e 3D

- Na figura abaixo, as subinterfaces serão numeradas da seguinte forma: $1 \leftrightarrow OA$, $2 \leftrightarrow OB$, $3 \leftrightarrow OC$, $4 \leftrightarrow OD$
- Os pontos de continuidade da pressão serão numerados analogamente: $1 \leftrightarrow A$, $2 \leftrightarrow B$, $3 \leftrightarrow C$, $4 \leftrightarrow D$

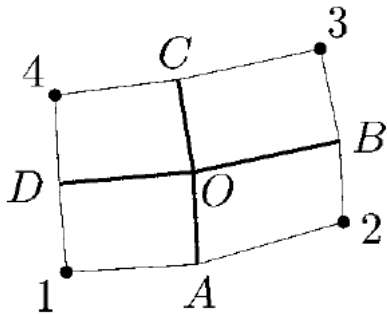


Fig. 9a de Aavatsmark, *Comp. Geos.*, 2002

Condições de continuidade de fluxo para OA, OB, OC, OD

$$\omega_{111}(\bar{p}_1 - p_1) + \omega_{112}(\bar{p}_4 - p_1) = \omega_{121}(\bar{p}_2 - p_2) + \omega_{122}(\bar{p}_1 - p_2)$$

$$\omega_{221}(\bar{p}_2 - p_2) + \omega_{222}(\bar{p}_1 - p_2) = \omega_{231}(\bar{p}_3 - p_3) + \omega_{232}(\bar{p}_2 - p_3)$$

$$\omega_{331}(\bar{p}_3 - p_3) + \omega_{332}(\bar{p}_2 - p_3) = \omega_{341}(\bar{p}_4 - p_4) + \omega_{342}(\bar{p}_3 - p_4)$$

$$\omega_{441}(\bar{p}_4 - p_4) + \omega_{442}(\bar{p}_3 - p_4) = \omega_{411}(\bar{p}_1 - p_1) + \omega_{412}(\bar{p}_4 - p_1)$$

MVF – Caso Incompressível 2D e 3D

- As condições de continuidade de fluxo formam um sistema linear 4 x 4 que pode ser resolvido para obter as pressões no ponto médio das faces em função das pressões no centro das células

$$\bar{\mathbf{p}} = [\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3, \bar{p}_4]^T, \mathbf{p} = [p_1, p_2, p_3, p_4]^T$$

$$\mathbf{A}\bar{\mathbf{p}} = \mathbf{B}\mathbf{p} \Rightarrow \bar{\mathbf{p}} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{p}$$

- Finalmente, os fluxos em OA, OB, OC e OD são

$$\mathbf{f} = [f_1, f_2, f_3, f_4]^T$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{C}\bar{\mathbf{p}} - \mathbf{D}\mathbf{p} = (\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} - \mathbf{D})\mathbf{p}$$

MVF – Caso Incompressível 2D e 3D

- A relação anterior expressa o fluxo em cada uma das subinterfaces em função das quatro pressões nos centros das células (vértices da célula na malha dual)

$$f_i = t_{i1}p_1 + t_{i2}p_2 + t_{i3}p_3 + t_{i4}p_4$$

t_{ij} entrada ij da matriz $\mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B} - \mathbf{D}$

- O fluxo em uma interface é a soma dos fluxos nas suas duas subinterfaces constituintes

MVF – Caso Incompressível 2D e 3D

- O fluxo em cada interface irá depender dos valores de pressão em seis células

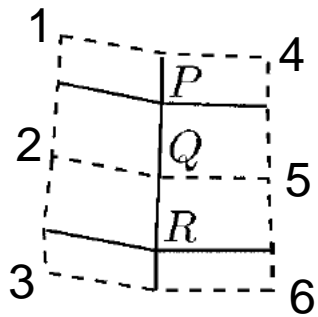


Fig. 4a de
Aavatsmark,
Comp. Geos.,
2002 (adaptada)

Fluxo em PR é igual a fluxo em PQ + fluxo em QR

Fluxo em PQ é função da pressão nas células 1, 2, 4, 5

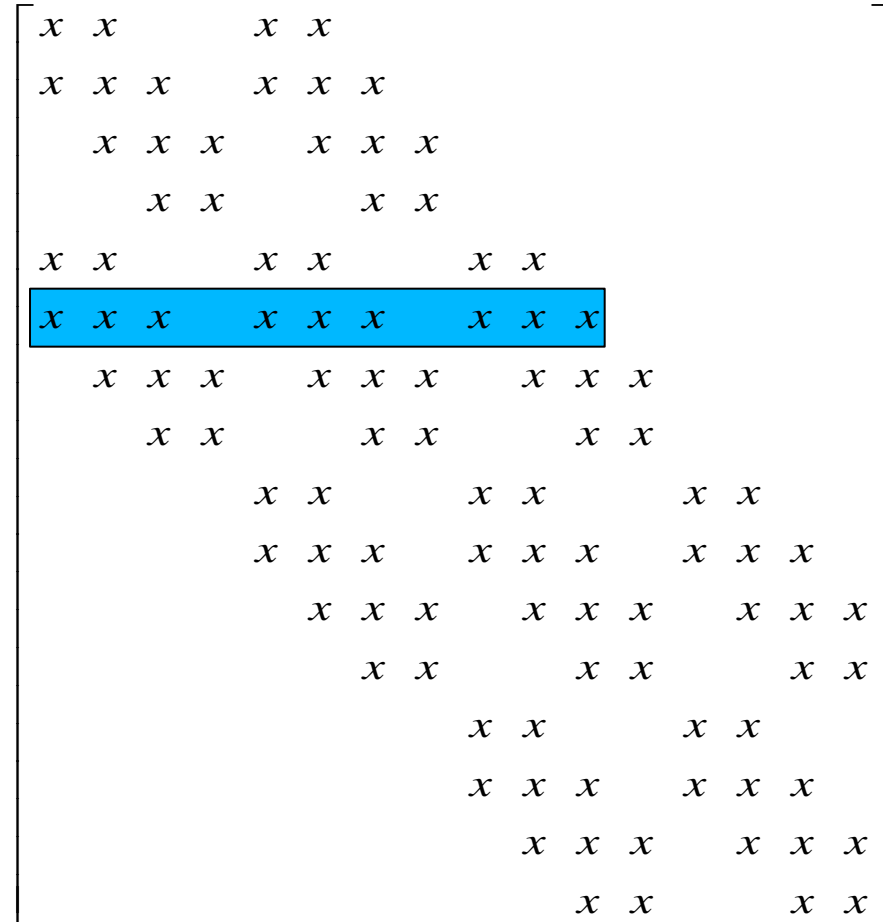
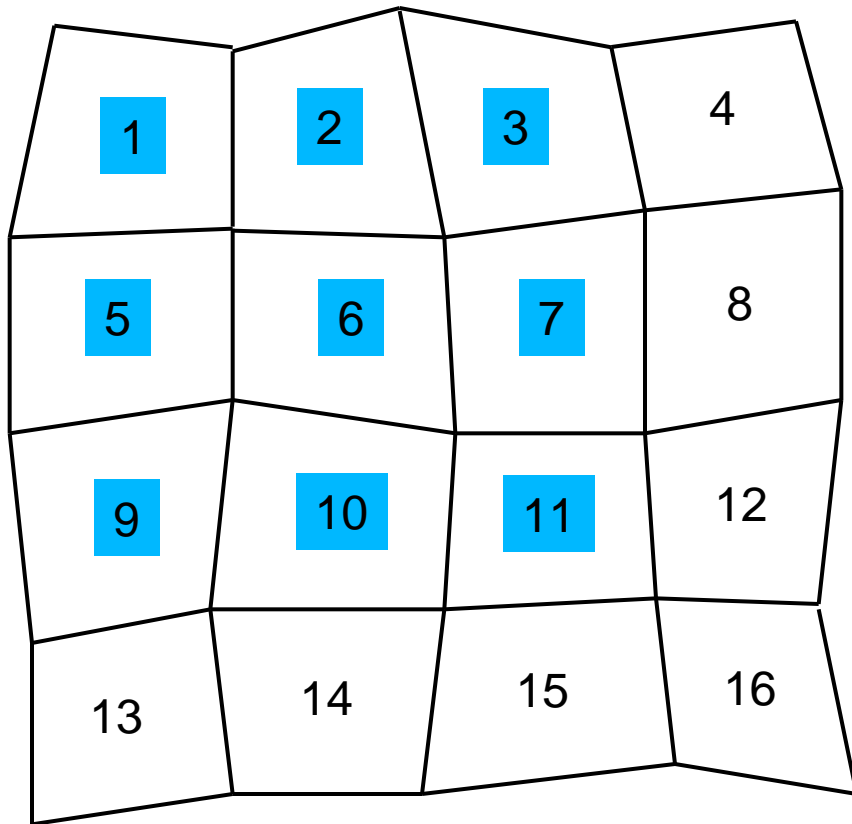
Fluxo em QR é função da pressão nas células 2, 3, 5, 6



Fluxo em PR é função da pressão nas células 1, 2, 3, 4, 5, 6

$$f_{PR} = \sum_{k=1}^6 t_k p_k$$

- Juntando os fluxos através das quatro faces de uma célula obtém-se um esquema de 9 pontos (em 3D são 27 pontos)



Equação de balanço para célula 6 depende de p nas células 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11

MVF – Caso Incompressível 2D e 3D

- A matriz gerada pelo método MPFA descrito não é, em geral, simétrica
- Também não é monotônica para malhas com razão de aspectos e/ou meio com anisotropia muito elevados e/ou malhas muito distorcidas
- Também não existem resultados formais demonstrando convergência dos esquemas, embora resultados numéricos indiquem que há convergência

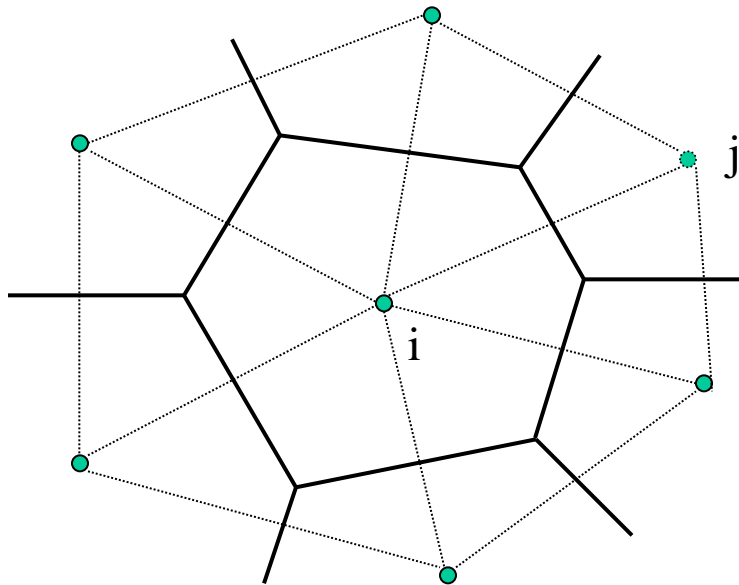
MVF – Caso Incompressível 2D e 3D

- Resultados recentes mostram que não é possível obter um esquema de 9 pontos que seja conservativo localmente, reproduza exatamente campos de pressão lineares e que seja incondicionalmente monotônico
- Ver
 - Nordbotten, Aavatsmark & Eigestad, Monotonicity of control volume methods, *Numerische Mathematik*, 2007
 - Keilegavlen, Nordbotten, Aavatsmark, Sufficient criteria are necessary for monotone control volume methods, *Applied Mathematics Letters*, 2009

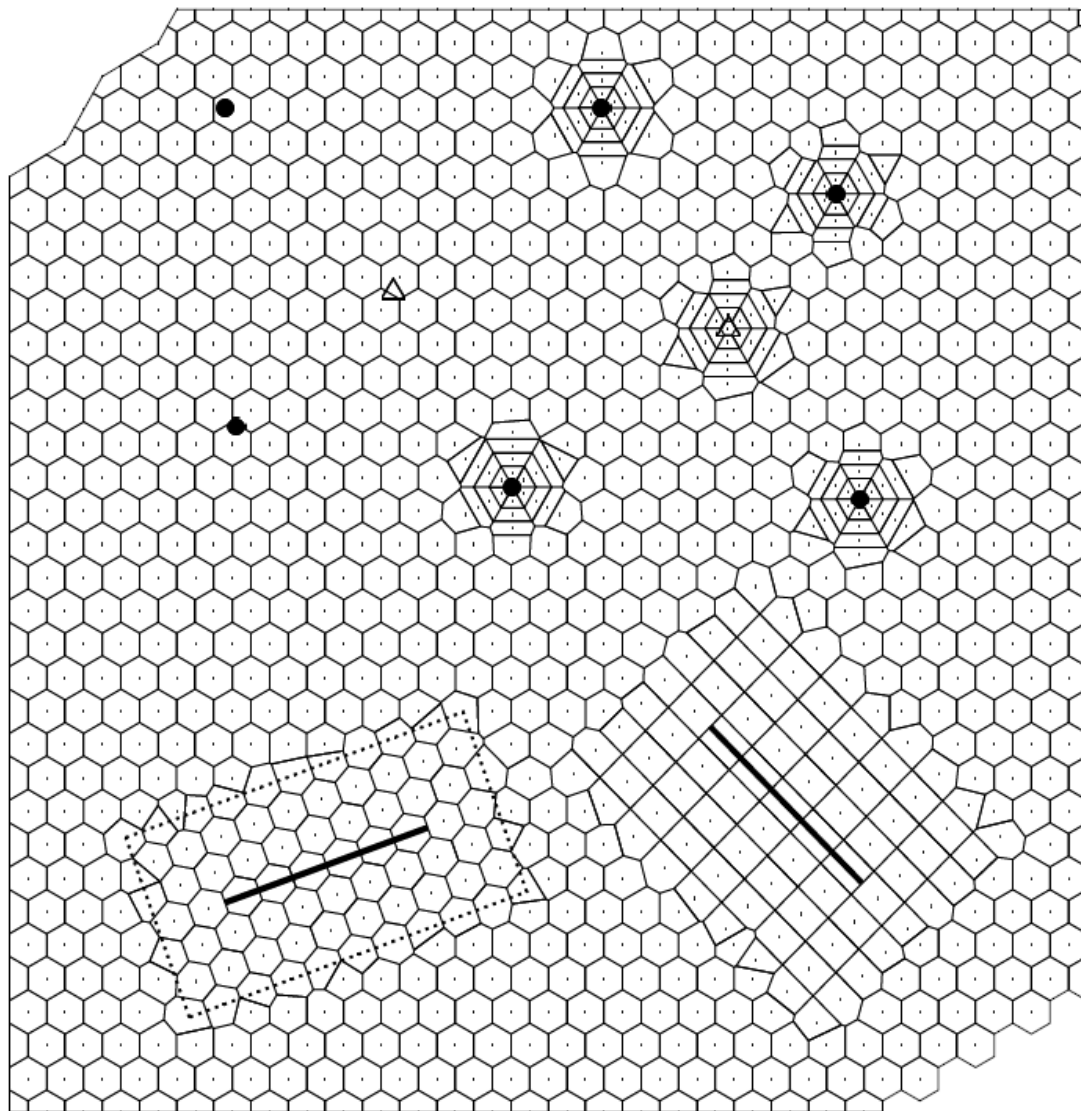
MVF – Caso Incompressível 2D e 3D

- Uma alternativa para obter flexibilidade de representação geométrica é a utilização de malhas não-estruturadas
- Malhas triangulares são bastante flexíveis para representar domínios irregulares, acompanhando descontinuidades internas e objetos de interesse (p.ex. a trajetória de poços), além de permitirem um adensamento/espalhamento da malha em áreas de maior/menor interesse

- Um tipo de malha não-estruturada descrita na literatura de simulação de reservatórios e incorporada em alguns simuladores comerciais é a malha de Voronoi (ou PEBI)



- Malhas Voronoi são construídas como a malha dual de uma malha triangular
- Os lados dos polígonos de Voronoi são as bissetrizes dos lados dos triângulos
- Esse polígono é a região do plano onde todos os pontos estão mais próximos do vértice central do que de qualquer outro



△ vertical injector
 ● vertical producer
 — horizontal well

Malha Voronoi construída a partir de “módulos”

Fig. 2.6 da tese de PhD de Verma,
Flexible Grids for Reservoir Simulation,
 Stanford University, 1998 (retirada de
 Palagi, Aziz, Use of Voronoi grids in
 reservoir simulation, SPE 22889, 1991)

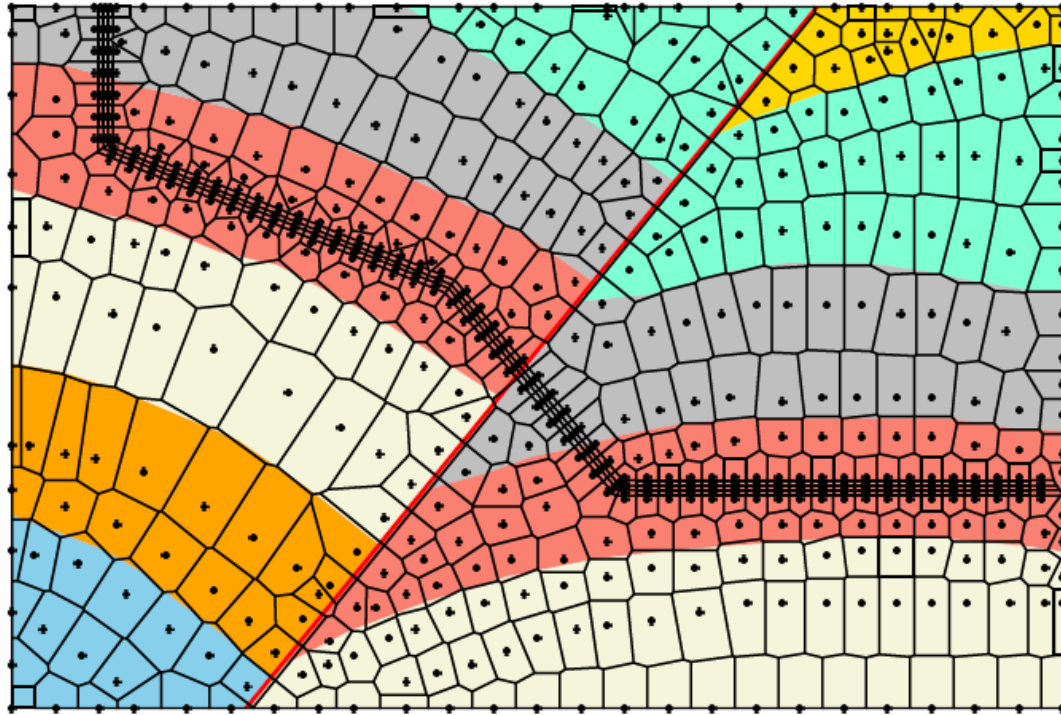


Fig. 4.14 da tese de PhD de Verma,
Flexible Grids for Reservoir Simulation,
Stanford Univeristy

Malha Voronoi
acompanhando um
poço de trajetória
complexa, uma falha e
camadas heterogêneas

Note que é difícil
alinhar as fronteiras
das células com as
heterogeneidades das
camadas

MVF – Caso Incompressível 2D e 3D

- Os polígonos de Voronoi são as células da malha onde o formalismo do MVF é aplicado
- Assumindo \mathbf{K} isotrópico, o vetor velocidade $\mathbf{K}\nabla p$ fica alinhado com ∇p e o fluxo em uma face perpendicular ao segmento ij é bem aproximado por

$$\int_e (k\nabla u) \cdot \mathbf{n} dS \approx k \frac{u_j - u_i}{d_{ij}} |e| = T_{ij} (u_j - u_i)$$

d_{ij} = distância entre os vértices i e j

$|e|$ = comprimento da face

MVF – Caso Incompressível 2D e 3D

- T_{ij} é a transmissibilidade entre os vértices i e j , função da geometria e das propriedades do meio
- No caso de meio heterogêneo, médias harmônicas são empregadas para obter a permeabilidade na face de forma semelhante às malhas cartesianas
- Juntando os fluxos em todas as faces:

$$\sum_{k \in \chi_i} T_{ik} (p_i - p_k) = Q_{m_i}$$

χ_i conjunto dos índices dos vértices vizinhos à i

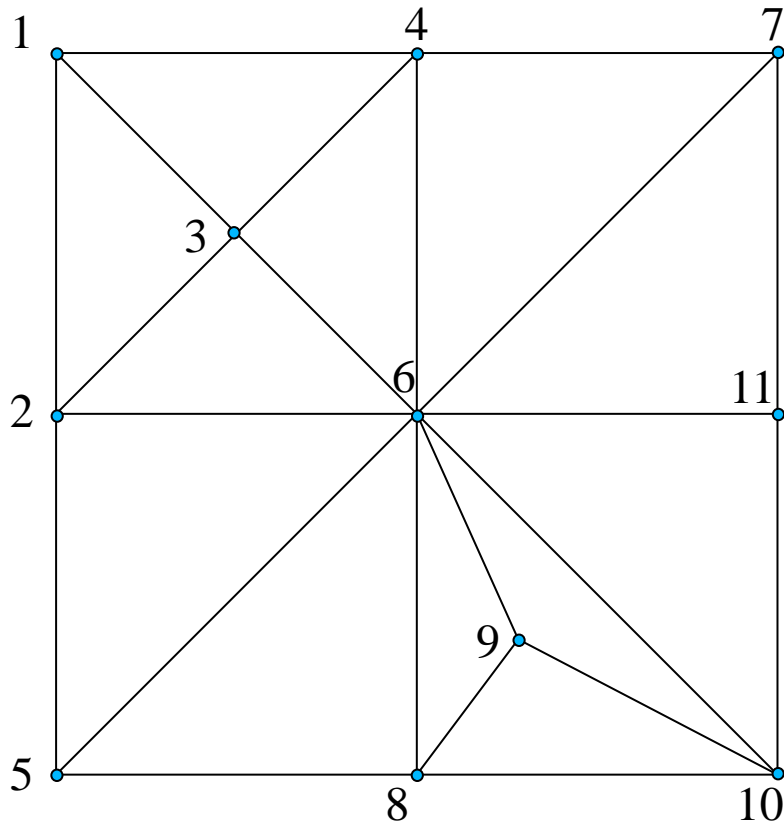
MVF – Caso Incompressível 2D e 3D

- Note que a expressão do MVF neste caso generaliza a de malhas cartesianas
- Para uma malha cartesiana 2D, por exemplo, se m é o índice do nó ij , χ_m é formado pelos índices que correspondem aos nós $i+1,j$, $i-1,j$, $i,j+1$ e $i,j-1$
- Este fato que tem consequências importantes para implementação dessa metodologia em simuladores TPFA existentes

MVF – Caso Incompressível 2D e 3D

- O número de conexões de uma célula da malha não é sempre o mesmo como em malhas cartesianas, já que um número arbitrário de triângulos pode compartilhar cada vértice
- A matriz resultante continua sendo esparsa mas com uma estrutura irregular

MVF – Caso Incompressível 2D e 3D



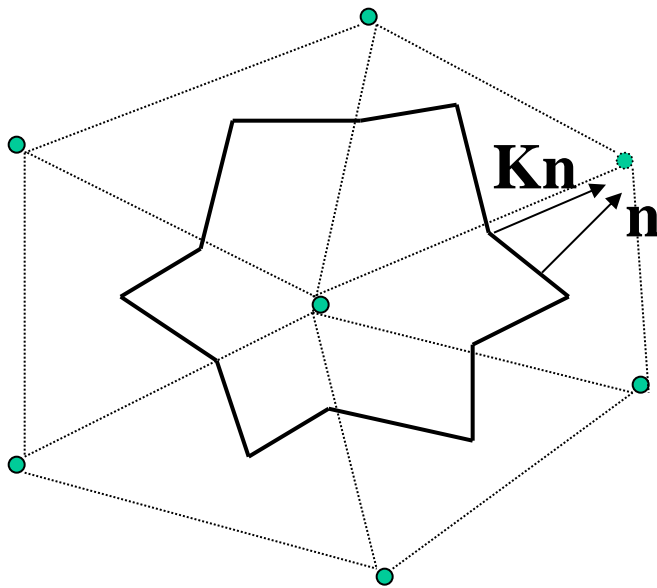
Malha triangular

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|
| 1 | * | * | * | * | | | | | | | |
| 2 | * | * | * | | * | * | | | | | |
| 3 | * | * | * | * | | * | | | | | |
| 4 | * | | * | * | | * | * | | | | |
| 5 | | * | | | * | * | | * | | | |
| 6 | | * | * | * | * | * | * | * | * | * | * |
| 7 | | | | * | | * | * | | | | * |
| 8 | | | | | * | * | | * | * | * | |
| 9 | | | | | | * | | * | | * | |
| 10 | | | | | | * | | * | * | * | * |
| 11 | | | | | | * | * | | | * | * |

Matriz resultante

MVF – Caso Incompressível 2D e 3D

- No caso em que \mathbf{K} é anisotrópico, $\mathbf{K}\nabla p$ e ∇p não estão alinhados e o mesmo tipo de problema que motivou os métodos MPFA aparece



- Para superar essa dificuldade, malhas \mathbf{K} -ortogonais foram introduzidas
- As faces são escolhidas de tal forma que \mathbf{Kn} esteja alinhado com o segmento ligando os vértices

MVF – Caso Incompressível 2D e 3D

- Em malhas **K**-ortogonais, o MVF pode ser formulado da mesma forma que para o caso isotrópico
- Se a razão de anisotropia for elevada, pode não ser possível gerar uma malha **K**-ortogonal
- Por essa razão, é comum considerar malhas tipo Voronoi apenas na direção horizontal e “empilhar” a mesma malha em camadas para tratar geometrias tridimensionais (2,5D)

MVF – Caso Pouco Compressível 1D

- Para fluido compressível, a EDP a ser resolvida tem evolução no tempo, aparecendo um termo de derivada temporal
- Como visto anteriormente, assumindo propriedades de rocha e fluido constantes, compressibilidade pequena e ignorando efeitos gravitacionais, a EDP que modela o escoamento se reduz à bem conhecida equação do calor
- Além de CF é preciso especificar uma condição inicial

MVF – Caso Pouco Compressível 1D

- Inciaremos o estudo do MVF para essa classe de problemas considerando geometria 1D e CF de Dirichlet homogêneas

$$p_t - \alpha p_{xx} = q_m, \quad 0 < x < L, t > 0 \quad \alpha = \frac{k}{\phi \mu c}$$

$$p(0, t) = 0, p(L, t) = 0, \quad t > 0$$

$$p(x, 0) = p_0(x), \quad 0 \leq x \leq L$$

- Antes de iniciar a derivação do MVF para este problema, serão feitas algumas observações qualitativas sobre a EDP acima

- Na ausência de fontes:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial t} > 0$$

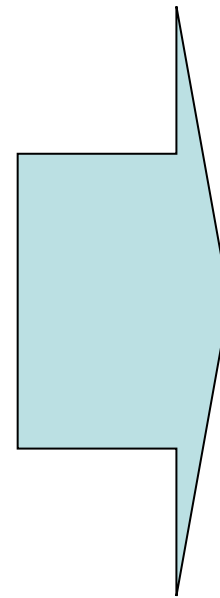
perfil de pressão
côncavo para cima

pressão
cresce

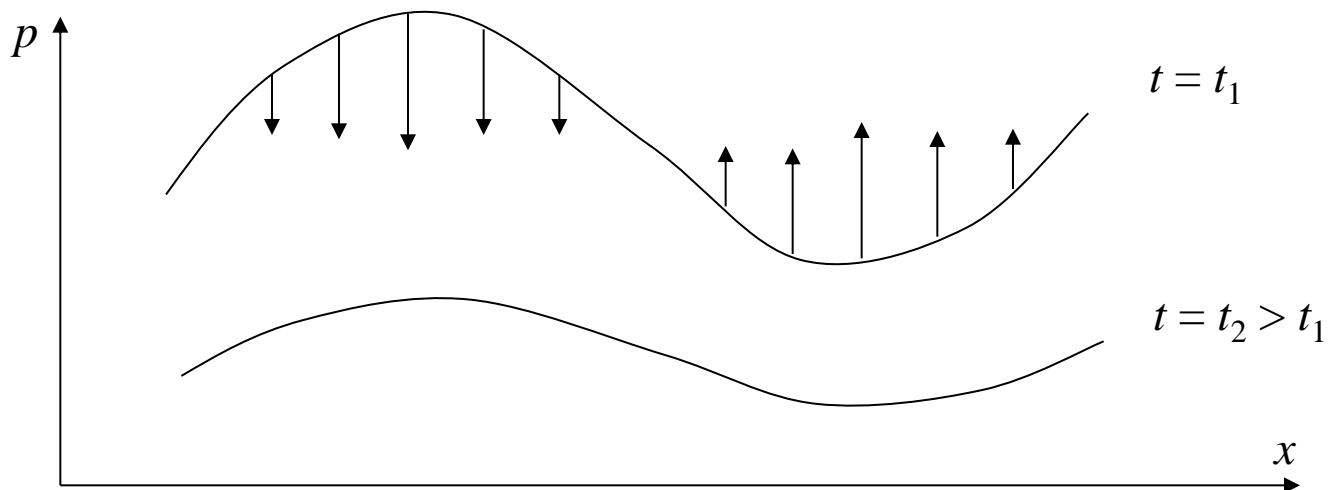
$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial t} < 0$$

perfil de pressão
côncavo para baixo

pressão
decrece



Efeito
suavizador



MVF – Caso Pouco Compressível 1D

- Princípio de máximo:

Se $q_m(x) \leq 0$ para $a < x < b$, $0 < t < T$, então

$$p(x) \leq \max \left\{ \max_{a \leq x \leq b} p_0(x), \max_{0 \leq t \leq T} \{p(a, t), p(b, t)\} \right\}$$

- A demonstração utiliza o mesmo argumento de contradição utilizado no caso incompressível
- Em um ponto de máximo $p_t = 0$ e $p_{xx} \leq 0$ o que é incompatível com $q_m(x) < 0$
- O caso $q_m(x) \leq 0$ é tratado com um argumento de continuidade semelhante ao do caso incompressível

MVF – Caso Pouco Compressível 1D

- Interpretação física: um máximo no interior implicaria que massa estaria sendo retirada pelas fronteiras sem expansão por compressibilidade, o que é incompatível com retirada de massa pelas fontes ($q_m(x) \leq 0$)
- Expressa a ideia intuitiva de que, ao retirar massa (produção), a maior pressão deve estar nas fronteiras ou no tempo inicial

MVF – Caso Pouco Compressível 1D

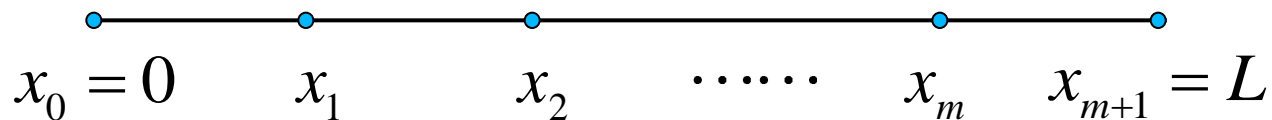
- Os conceitos básicos do MVF são semelhantes aos vistos para o caso incompressível, em particular os termos espaciais são tratados de forma idêntica
- Estudaremos princípios de máximo discretos para garantir estabilidade com a evolução no tempo, ou seja, para garantir que pequenos erros (p.ex. arredondamento) não se amplifiquem à medida que a solução avança no tempo

MVF – Caso Pouco Compressível 1D

- Para simplificar a discussão ignoraremos fontes/sumidouros, ou seja, trataremos a EDP

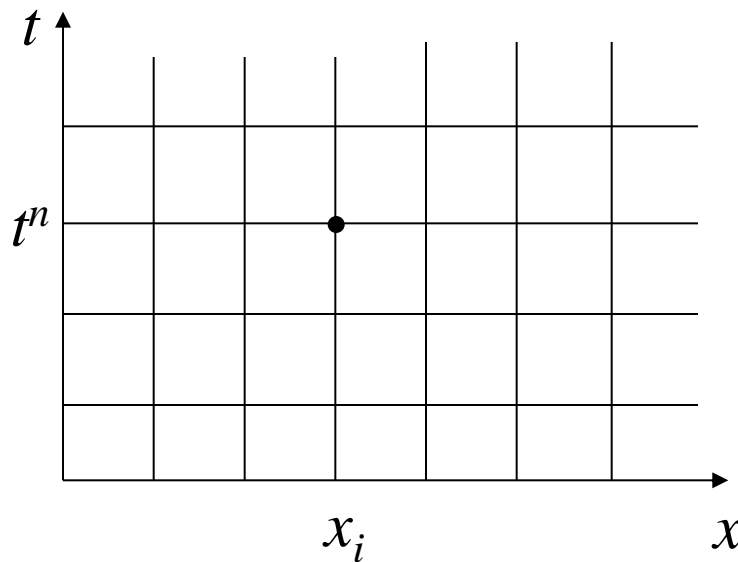
$$p_t = \alpha p_{xx}, \quad 0 < x < L, t > 0$$

- Consideraremos também malha uniforme de largura h no domínio espacial (intervalo $[0,L]$):



$$h = x_{i+1} - x_i$$

- Similarmente, o tempo será dividido em uma seqüência de intervalos $[t^n, t^{n+1}]$
- $\Delta t^n = t^{n+1} - t^n$ é o tamanho do *passo de tempo* que, por enquanto, consideraremos uniforme: $\Delta t^n = \Delta t$ para todo n



$$p_i^n \approx p(x_i, t^n)$$

Aproximação de p em

$$x = x_i, \quad t = t^n$$

MVF – Caso Pouco Compressível 1D

- Utilizamos a mesma aproximação de segunda ordem para derivada p_{xx} , utilizada nos problemas elíticos:

$$p_{xx}(x_i, t^n) \approx \frac{p_{i-1}^n - 2p_i^n + p_{i+1}^n}{h^2}$$

- Para a derivada no tempo, utilizamos a seguinte aproximação:

$$p_t(x_i, t^n) \approx \frac{p_i^{n+1} - p_i^n}{\Delta t}$$

MVF – Caso Pouco Compressível 1D

- Expansão em série de Taylor mostra que esta aproximação é de primeira ordem
- Como anteriormente, a notação P_i^n irá indicar o valor da solução exata no ponto (x_i, t^n)

$$P_i^{n+1} = P_i^n + \Delta t p_t(x_i, t^n) + \frac{\Delta t^2}{2} p_{tt}(x_i, t^{n*}), t^n \leq t^{n*} \leq t^{n+1}$$

⇓

$$\frac{P_i^{n+1} - P_i^n}{\Delta t} = p_t(x_i, t^n) + \frac{\Delta t}{2} p_{tt}(x_i, t^{n*}) = p_t(x_i, t^n) + O(\Delta t)$$

MVF – Caso Pouco Compressível 1D

- Juntando essas duas aproximações, $p_t = \alpha p_{xx}$ pode ser aproximada no ponto (x_i, t^n) por

$$\frac{p_i^{n+1} - p_i^n}{\Delta t} = \alpha \frac{p_{i-1}^n - 2p_i^n + p_{i+1}^n}{h^2}$$

- As condições iniciais e de fronteira são tratadas por

$$p_i^0 = p(x_i, 0), \quad p_0^n = p_m^n = 0$$

- Simplificando,

$$\frac{p_i^{n+1} - p_i^n}{\Delta t} = \alpha \frac{p_{i-1}^n - 2p_i^n + p_{i+1}^n}{h^2}$$

$$\Downarrow$$

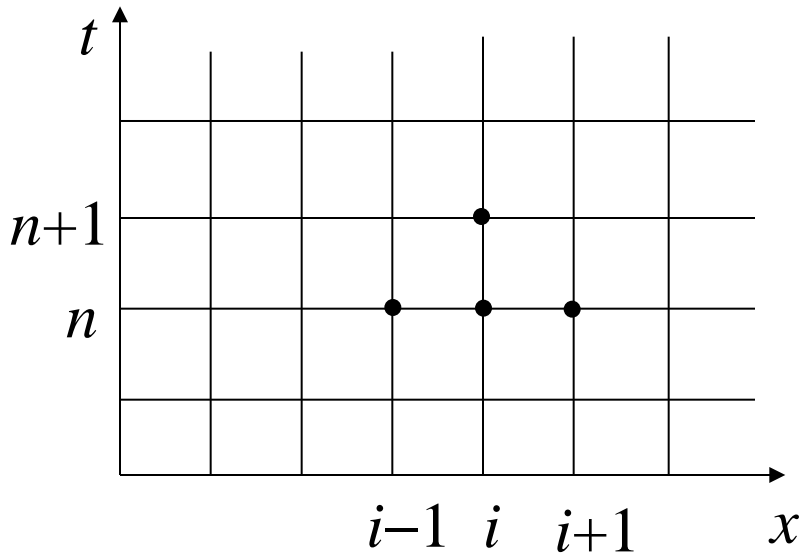
$$p_i^{n+1} = \nu p_{i-1}^n + (1 - 2\nu)p_i^n + \nu p_{i+1}^n$$

$$\nu = \frac{\alpha \Delta t}{h^2}$$

- Método *explícito*: o valor no tempo t^{n+1} é calculado diretamente (explicitamente) a partir dos valores em t^n sem necessidade de resolver um sistema linear
- O avanço no tempo se inicia com a condição inicial conhecida

MVF – Caso Pouco Compressível 1D

- Método de Euler para frente:



$$p_i^{n+1} = \nu p_{i-1}^n + (1 - 2\nu) p_i^n + \nu p_{i+1}^n$$

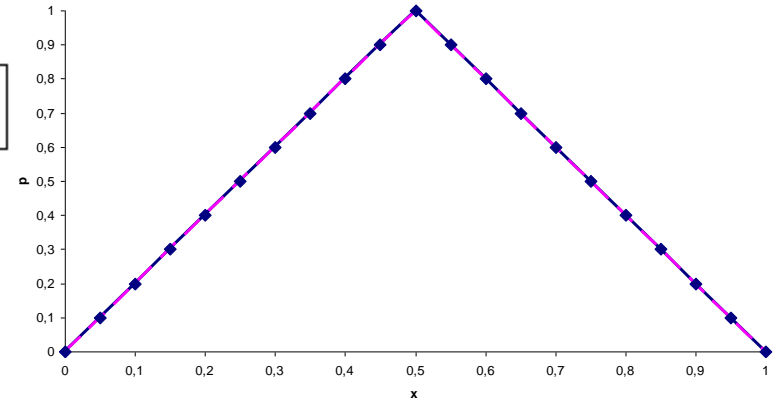
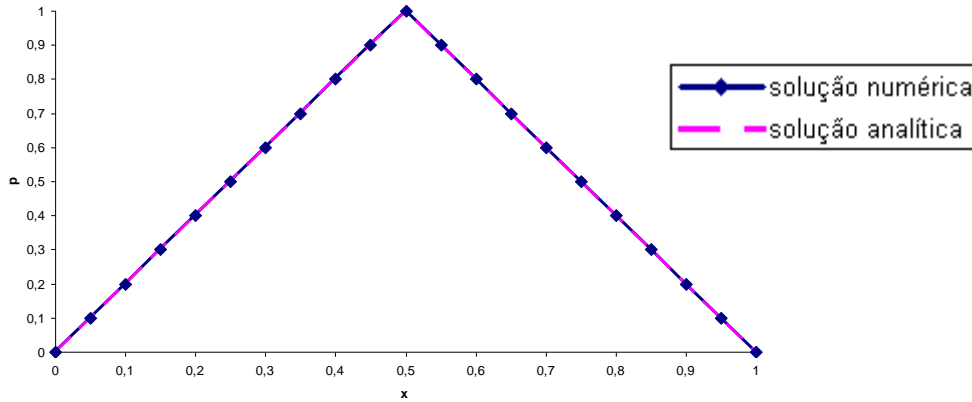
$$p_i^0 = p(x_i, 0), \quad p_0^n = p_m^n = 0$$

Resultados para método explícito para dois passos de tempo ($\alpha=L=1, m=20$)

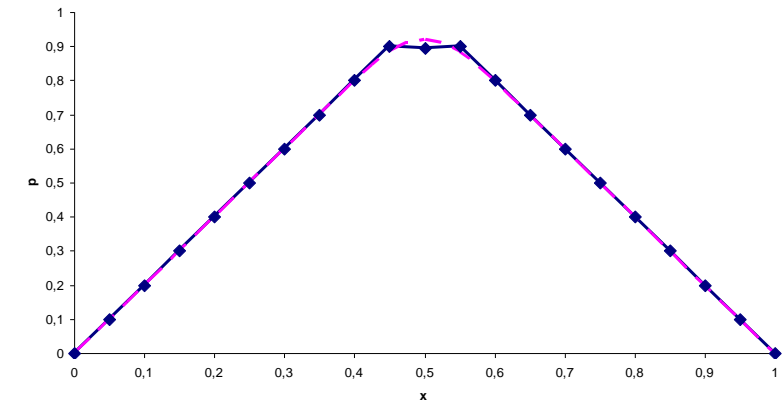
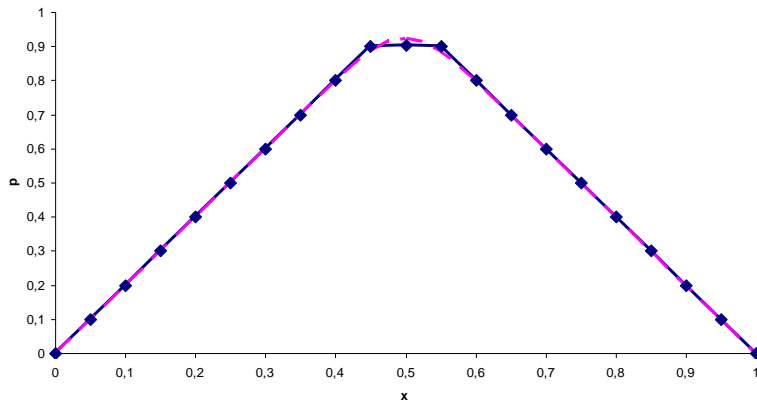
$\Delta t = 0,0012$

$\Delta t = 0,0013$

$t = 0$



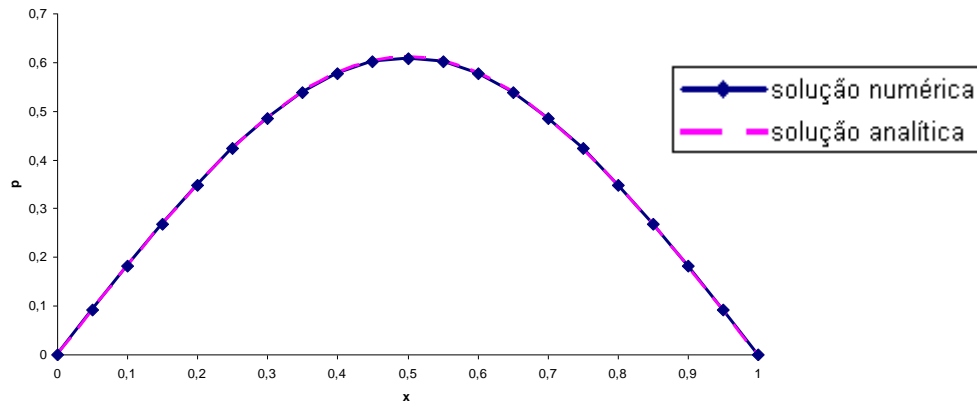
um passo de tempo



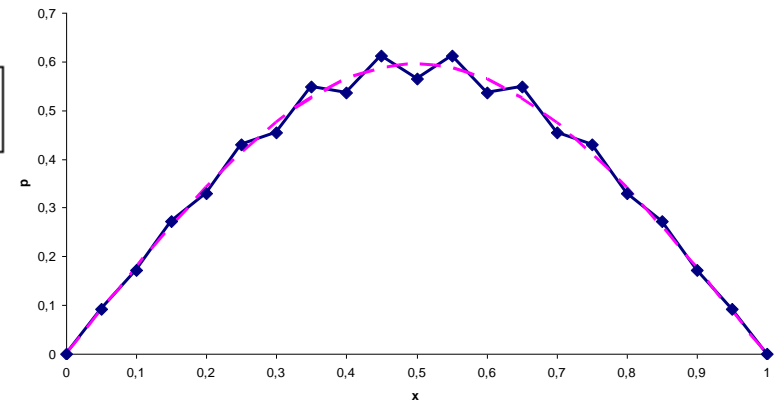
Resultados para método explícito para dois passos de tempo ($\alpha=L=1, m=20$)

$\Delta t = 0,0012$

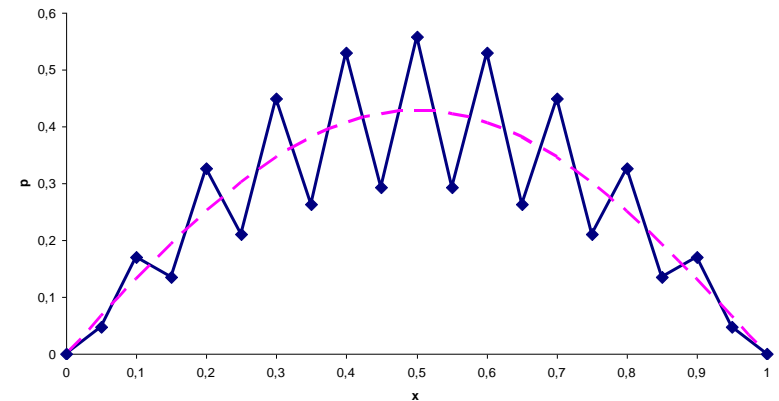
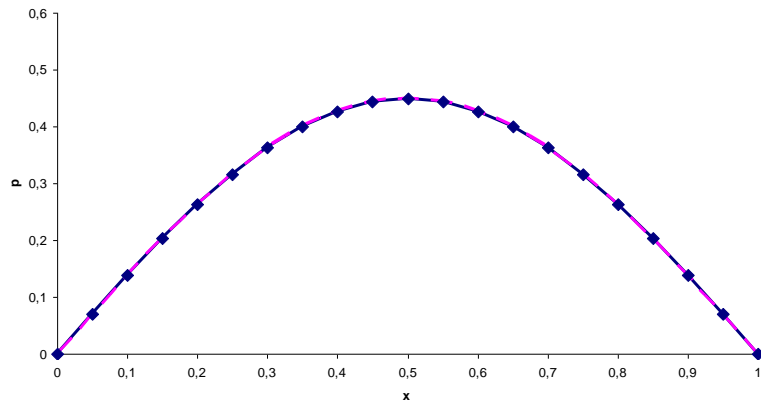
25 passos de tempo



$\Delta t = 0,0013$



50 passos de tempo



MVF – Caso Pouco Compressível 1D

- Uma pequena diferença no intervalo de tempo fez gerar fortes oscilações na solução pelo método explícito
- Vamos utilizar um argumento baseado no princípio de máximo para justificar este comportamento

- Fórmula de avanço no tempo para o método explícito

$$p_i^{n+1} = \nu p_{i-1}^n + (1 - 2\nu)p_i^n + \nu p_{i+1}^n$$

- Para $1 - 2\nu > 0$, todos os coeficientes são positivos e somam um e, portanto,

$$p_i^{n+1} \leq \max\{p_{i-1}^n, p_i^n, p_{i+1}^n\} \leq \max_{0 \leq i \leq m+1} \{p_i^n\}$$

- Condição suficiente para estabilidade do esquema explícito

$$1 - 2\nu > 0 \Rightarrow \nu = \alpha \frac{\Delta t}{h^2} < \frac{1}{2} \Rightarrow \Delta t < \frac{h^2}{2\alpha}$$

- Para o exemplo em questão, $\alpha = 1$, $h = 1/20$

$$\Delta t \leq \frac{1}{800} = 0,00125$$

- Em problemas tridimensionais, a condição é ainda mais restritiva:

$$\alpha \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} + \alpha \frac{\Delta t}{(\Delta y)^2} + \alpha \frac{\Delta t}{(\Delta z)^2} \leq \frac{1}{2}$$

Para malha uniforme, $\Delta x = \Delta y = \Delta z = h : \Delta t \leq \frac{h^2}{6\alpha}$

- Para os problemas práticos de simulação de reservatórios esta condição é excessivamente restrita e levaria à execução de milhões de passo de tempo para cobrir os intervalos de tempo de interesse
- Valores típicos em simulação de reservatórios:

$$h = 100 \text{ m}, k = 1000 \text{ mD}, \mu = 1 \text{ cp}, \phi = 0,1, c = 7 \times 10^{-6} \text{ psi}^{-1}$$



$$\Delta t_{\text{max}} \approx 0,005 \text{ dias}$$

1.460.000 passos de tempo para 20 anos de simulação!!!!

MVF – Caso Pouco Compressível 1D

- As restrições severas de estabilidade dos métodos explícitos são superadas considerando métodos *implícitos*, onde as aproximações de p_t e p_{xx} são consideradas no tempo t^{n+1} :

$$p_{xx}(x_i, t^{n+1}) \approx \frac{p_{i-1}^{n+1} - 2p_i^{n+1} + p_{i+1}^{n+1}}{h^2}$$

$$p_t(x_i, t^{n+1}) \approx \frac{p_i^{n+1} - p_i^n}{\Delta t}$$

MVF – Caso Pouco Compressível 1D

- Como anteriormente, expansão em série de Taylor mostra que a aproximação de p_t é de primeira ordem

$$P_i^n = P_i^{n+1} - \Delta t p_t(x_i, t^{n+1}) + \frac{\Delta t^2}{2} p_{tt}(x_i, t^{n*}), t^n \leq t^{n*} \leq t^{n+1}$$

⇓

$$\frac{P_i^{n+1} - P_i^n}{\Delta t} = p_t(x_i, t^{n+1}) - \frac{\Delta t}{2} p_{tt}(x_i, t^{n*}) = p_t(x_i, t^{n+1}) + O(\Delta t)$$

MVF – Caso Pouco Compressível 1D

- Juntando essas duas aproximações, $p_t = \alpha p_{xx}$ pode ser aproximada no ponto (x_i, t^{n+1}) por

$$\frac{p_i^{n+1} - p_i^n}{\Delta t} = \alpha \frac{p_{i-1}^{n+1} - 2p_i^{n+1} + p_{i+1}^{n+1}}{h^2}$$

- O tratamento das condições iniciais e de fronteira não se altera

$$p_i^0 = p(x_i, 0), \quad p_0^n = p_m^n = 0$$

MVF – Caso Pouco Compressível 1D

- Simplificando,

$$\frac{p_i^{n+1} - p_i^n}{\Delta t} = \alpha \frac{p_{i-1}^{n+1} - 2p_i^{n+1} + p_{i+1}^{n+1}}{h^2}$$

⇓

$$v = \frac{\alpha \Delta t}{h^2}$$

$$-v p_{i-1}^{n+1} + (1 + 2v) p_i^{n+1} - v p_{i+1}^{n+1} = p_i^n$$

- No método implícito é necessário resolver um sistema linear
- O sistema resultante tem características semelhantes ao sistema que aparece na resolução de eqs. elíticas

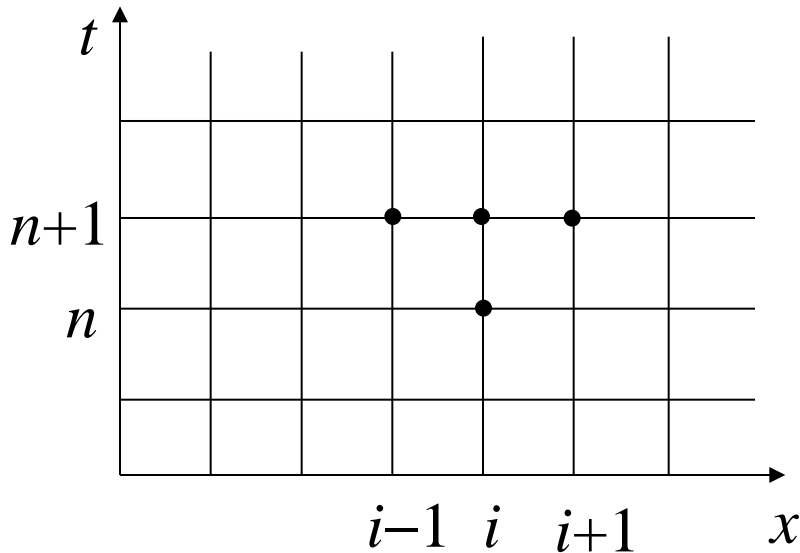
$$\begin{bmatrix}
 1+2\nu & -\nu & & & \\
 -\nu & 1+2\nu & -\nu & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & -\nu & 1+2\nu & -\nu & \\
 & & & \ddots & \ddots \\
 & & & & -\nu & 1+2\nu
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 p_1^{n+1} \\
 p_2^{n+1} \\
 \vdots \\
 p_i^{n+1} \\
 \vdots \\
 p_m^{n+1}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 p_1^n \\
 p_2^n \\
 \vdots \\
 p_i^n \\
 \vdots \\
 p_m^n
 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b}$$

\mathbf{A} é simétrica e tridiagonal

MVF – Caso Pouco Compressível 1D

- Método de Euler para trás:

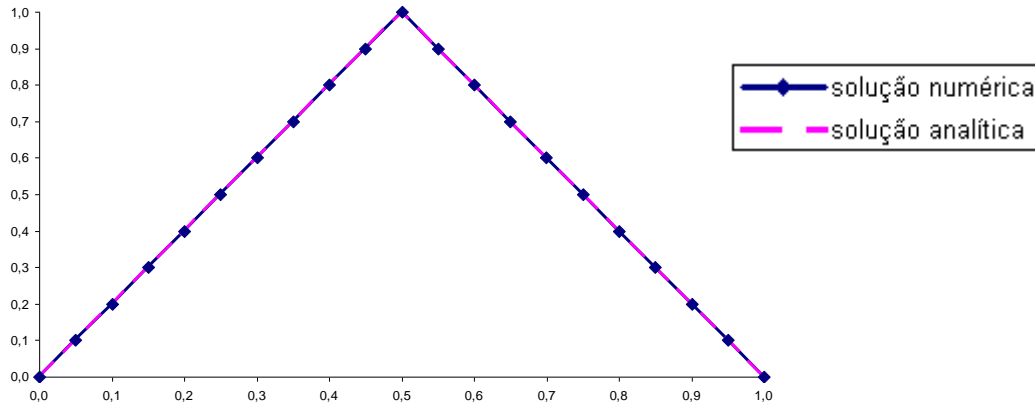


$$-v p_{i-1}^{n+1} + (1 + 2v) p_i^{n+1} - v p_{i+1}^{n+1} = p_i^n$$

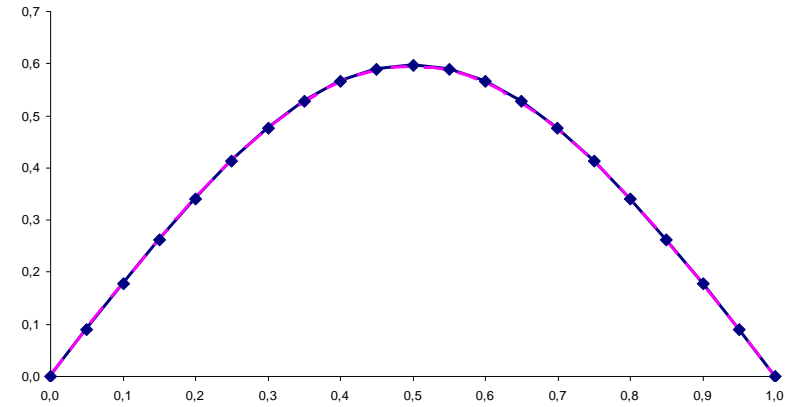
$$p_i^0 = p(x_i, 0), \quad p_0^n = p_m^n = 0$$

Resultados para método implícito para $\Delta t = 0,0013$ ($\alpha=L=1$, $m=20$)

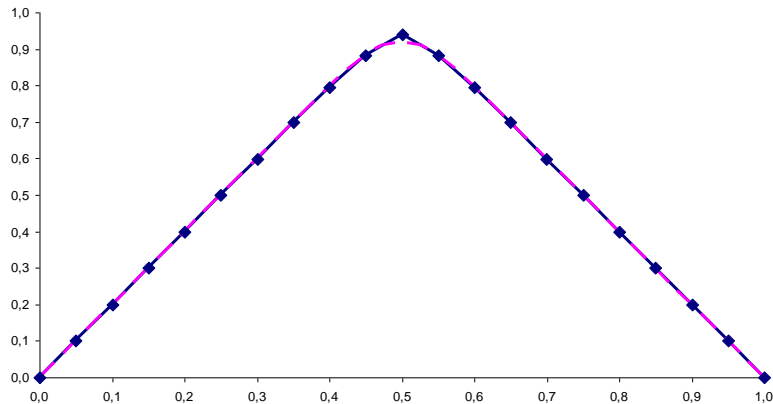
$t = 0$



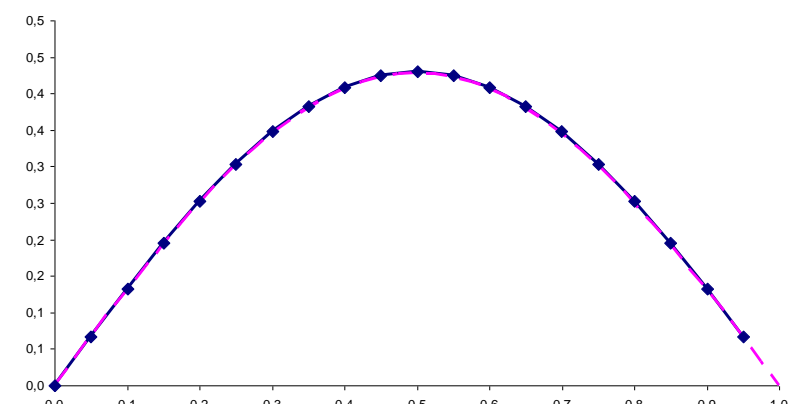
25 passos de tempo



um passo de tempo



50 passos de tempo



MVF – Caso Pouco Compressível 1D

- A solução numérica é suave e aproxima bem a solução exata mesmo para valores de Δt que geram oscilações no método explícito
- Para o método implícito, pode-se mostrar que vale o princípio de máximo independentemente do valor de Δt : a solução aproximada é incondicionalmente estável

$$-v p_{i-1}^{n+1} + (1 + 2v) p_i^{n+1} - v p_{i+1}^{n+1} = p_i^n$$

$$\Downarrow$$

$$p_i^{n+1} - p_i^n = v(p_{i+1}^{n+1} - p_i^{n+1}) + v(p_{i-1}^{n+1} - p_i^{n+1})$$

$$p_j^{n+1} = \max_{0 \leq i \leq m+1} \{p_i^{n+1}\} \Rightarrow p_j^{n+1} - p_j^n \leq 0 \Rightarrow p_j^{n+1} \leq p_j^n \leq \max_{0 \leq i \leq m+1} \{p_i^n\}$$

- Vale o princípio de máximo independente do valor de v
- Expressa o fato de que, na célula j onde a pressão é maior que as vizinhas, a retirada de massa pelas fronteiras deve induzir uma queda na pressão, já que haverá expansão do fluido por compressibilidade

MVF – Caso Pouco Compressível 1D

- De forma similar ao caso incompressível, como consequência do princípio de máximo, segue a seguinte propriedade para a matriz \mathbf{A}

Se $\mathbf{A}\mathbf{p} = \mathbf{b}$ com $\mathbf{b} \leq \mathbf{0}$, então $\mathbf{p} \leq \mathbf{0}$

- De fato, basta aplicar o princípio de máximo para um problema com $\mathbf{b}_i = p_i^n$
- Dessa propriedade se deduz que \mathbf{A} é não-singular e monótona ($\mathbf{A}^{-1} \geq \mathbf{0}$) de forma inteiramente similar ao caso incompressível

MVF – Caso Pouco Compressível 2D e 3D

- Para estender a discretização para situações mais gerais (2D, 3D, coeficientes variáveis, malha não uniforme, etc) a aproximação temporal não se altera e a aproximação espacial segue inteiramente similar ao caso incompressível
- Vamos considerar rapidamente o MVF aplicado a um problema 2D

MVF – Caso Pouco Compressível 2D e 3D

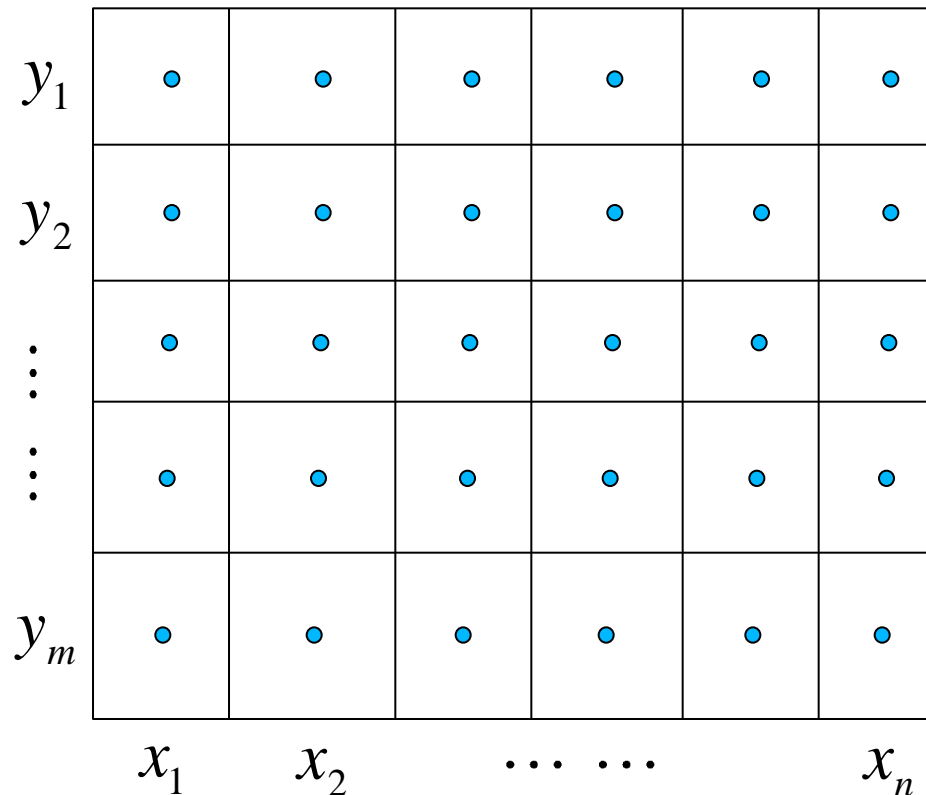
- Em 2D a EDP para escoamento pouco compressível fica dada por

$$\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x(x, y) \frac{\partial p}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y(x, y) \frac{\partial p}{\partial y} \right) = q_m(x, y)$$

- Condições de fronteira similares ao caso incompressível devem ser especificadas
- Condições iniciais precisam ser especificadas

MVF – Caso Pouco Compressível 2D e 3D

- Malha espacial centrada na célula



MVF – Caso Pouco Compressível 2D e 3D

- Como no caso incompressível, o primeiro passo é integrar a EDP na célula centrada em (x_i, y_j) , fixando o instante de tempo em $t = t^m$, onde $m = n$ para método explícito e $m = n + 1$ para método implícito

$$\begin{aligned} & \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \frac{\partial p}{\partial t} \Big|_{(x,y,t^m)} dx dy - \\ & - \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial p}{\partial x} \right) \Big|_{(x,y,t^m)} dx dy - \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial p}{\partial y} \right) \Big|_{(x,y,t^m)} dy dx = \\ & = \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} q_m dx dy \end{aligned}$$

MVF – Caso Pouco Compressível 2D e 3D

- A primeira integral no lado esquerdo é aproximada pela regra do ponto médio substituindo a derivada temporal no integrando pela aproximação de primeira ordem utilizada anteriormente

$$\int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \frac{\partial p}{\partial t} \Big|_{(x,y,t^m)} dx dy \approx \Delta x_i \Delta y_j \frac{\partial p}{\partial t} \Big|_{(x_i,y_j,t^m)} \approx \Delta x_i \Delta y_j \frac{p_{ij}^{n+1} - p_{ij}^n}{\Delta t^n} =$$
$$V_{ij} \frac{p_{ij}^{n+1} - p_{ij}^n}{\Delta t^n}$$

MVF – Caso Pouco Compressível 2D e 3D

- Para as demais integrais do lado esquerdo, as mesmas aproximações do caso incompressível são utilizadas (regra do ponto médio, média harmônica, etc), resultando em expressões inteiramente semelhantes, mas incorporando a dependência no tempo

$$\int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial p}{\partial x} \right) \Big|_{(x,y,t^m)} dx dy \approx T_{i+1/2,j} \left(p_{i+1,j}^m - p_{ij}^m \right) - T_{i-1/2,j} \left(p_{ij}^m - p_{i-1,j}^m \right)$$

$$\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial p}{\partial y} \right) \Big|_{(x,y,t^m)} dy dx \approx T_{i,j+1/2} \left(p_{i,j+1}^m - p_{ij}^m \right) - T_{i,j-1/2} \left(p_{ij}^m - p_{i,j-1}^m \right)$$

MVF – Caso Pouco Compressível 2D e 3D

- Para o caso 2D com espessura constante, o termo fonte q_m corresponde à vazão mássica específica dada em termos de vazão mássica por unidade de área
- Assim, o termo

$$Q_{m_{ij}} = \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} q_m dx dy$$

corresponde à vazão mássica (massa/tempo) que iremos assumir especificada (corresponde à vazão dos poços de injeção ou produção)

MVF – Caso Pouco Compressível 2D e 3D

- Em geral, a vazão volumétrica em condições padrão (de superfície) Q_{sc} é especificada
- Para o problema compressível, a densidade não é constante e precisamos da densidade em condições padrão para relacionar as vazões mássica e volumétrica

$$Q_{m_{ij}} = \rho_{sc} Q_{sc}$$

- Calcular a pressão de fluxo nos poços é um problema relevante que será tratado mais adiante

MVF – Caso Pouco Compressível 2D e 3D

- CF são tratadas da mesma forma que no caso incompressível
- Juntando as aproximações para todas as integrais,

$$V_{ij} \frac{p_{ij}^{n+1} - p_{ij}^n}{\Delta t^n} - T_{i+1/2,j} (p_{i+1,j}^m - p_{ij}^m) + T_{i-1/2,j} (p_{ij}^m - p_{i-1,j}^m) - \\ T_{i,j+1/2} (p_{i,j+1}^m - p_{ij}^m) + T_{i,j-1/2} (p_{ij}^m - p_{i,j-1}^m) = Q_{m_{ij}}$$

MVF – Caso Pouco Compressível 2D e 3D

- Para $m = n$, método explícito:

$$p_{ij}^{n+1} = p_{ij}^n +$$

$$\frac{\Delta t^n}{V_{ij}} \left(T_{i+1/2,j} p_{i+1,j}^n + T_{i-1/2,j} p_{i-1,j}^n + T_{i,j+1/2} p_{i,j+1}^n + T_{i,j-1/2} p_{i,j-1}^n - \Sigma_{ij} p_{ij}^n \right) + Q_{m_{ij}}$$

$$\Sigma_{ij} = T_{i+1/2,j} + T_{i-1/2,j} + T_{i,j+1/2} + T_{i,j-1/2}$$

- Não é necessário resolver um sistema linear
- As restrições no tamanho do passo de tempo para obter uma solução estável são mais severas que no caso 1D

MVF – Caso Pouco Compressível 2D e 3D

- Para satisfazer o princípio de máximo:

$$1 - \frac{\Delta t^n}{V_{ij}} \Sigma_{ij} > 0 \Rightarrow \Delta t^n < \frac{V_{ij}}{\Sigma_{ij}}$$

- A condição é local e, portanto, a célula da malha com condição mais restrita irá determinar o tamanho do passo de tempo estável

MVF – Caso Pouco Compressível 2D e 3D

- Para $m = n + 1$, método implícito:

$$-T_{i+1/2,j}p_{i+1,j}^{n+1} - T_{i-1/2,j}p_{i-1,j}^{n+1} - T_{i,j+1/2}p_{i,j+1}^{n+1} - T_{i,j-1/2}p_{i,j-1}^{n+1} +$$
$$\left(\frac{V_{ij}}{\Delta t^n} + \Sigma_{ij} \right) p_{ij}^{n+1} = p_{ij}^n + Q_{m_{ij}}$$
$$\Sigma_{ij} = T_{i+1/2,j} + T_{i-1/2,j} + T_{i,j+1/2} + T_{i,j-1/2}$$

- O método implícito resulta em um sistema linear pentadiagonal com a mesma estrutura de esparsidade do caso incompressível

MVF – Caso Pouco Compressível 2D e 3D

- Argumentos inteiramente similares ao caso 1D mostram que um princípio de máximo discreto é satisfeito e que a matriz é não-singular e monótona
- Da mesma forma, situações mais complexas (3D, etc) resultam em sistemas com as mesmas estruturas do caso incompressível

Tratamento de Poços

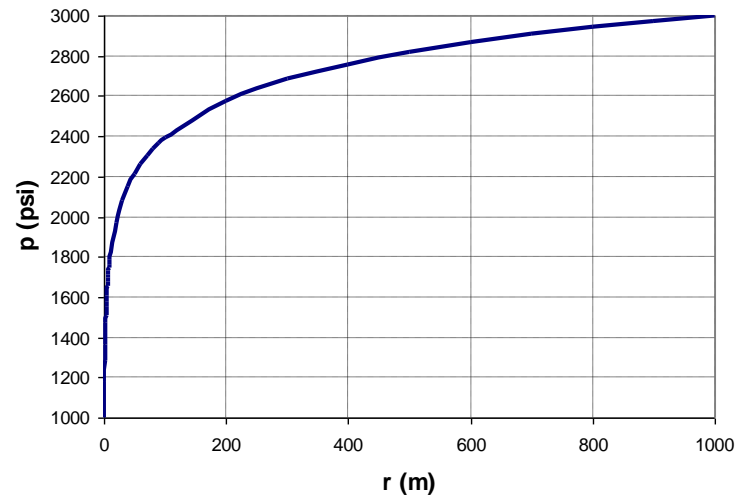
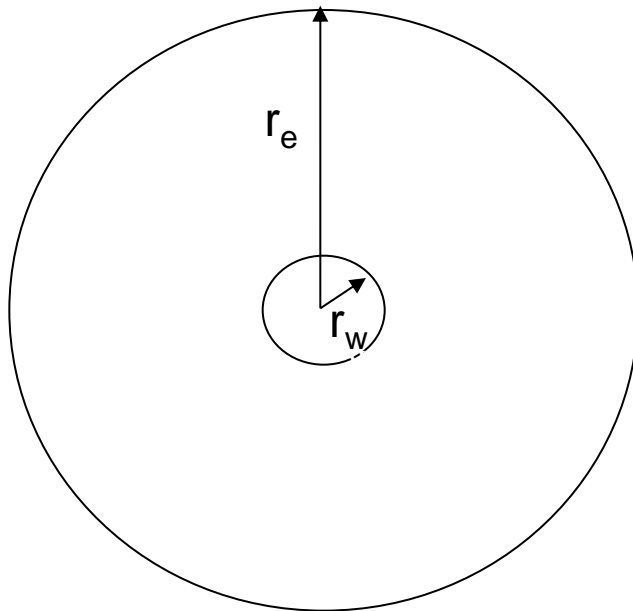
- Poços são tratados como fontes (injeção) ou sumidouros (produção) pontuais, já que o raio dos poços é da ordem de centímetros enquanto a distância entre poços é da ordem de centenas de metros
- Nas vizinhanças dos poços o fluxo tende a ser radial e aparece um comportamento singular para a pressão
- Para fluxo incompressível em meio horizontal e homogêneo, a singularidade é de natureza logarítmica

- Equação para o escoamento incompressível em coordenadas cilíndricas

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) = 0, \quad p(r_w) = p_w, \quad p(r_e) = p_e$$

⇓

$$r \frac{\partial p}{\partial r} = c' \Rightarrow \frac{dr}{r} = c dp \Rightarrow \ln \frac{r}{r_w} = c(p - p_w) \Rightarrow p = p_w + \left(\frac{p_e - p_w}{\ln(r_e/r_w)} \right) \ln \frac{r}{r_w}$$

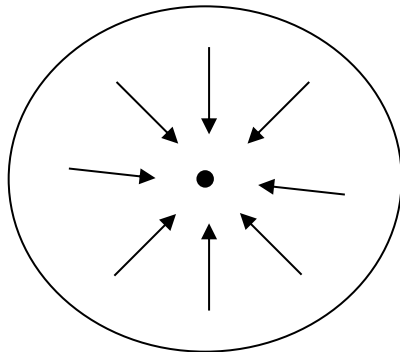


- Velocidade na direção radial cresce do raio externo para o interno:

$$\mathbf{v}_r = -\frac{k\rho}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{k\rho}{\mu} \frac{1}{r} \frac{p_e - p_w}{\ln(r_e/r_w)}$$

- A vazão atravessando qualquer anel concêntrico é constante (h é a espessura do meio)

$$q = \iint_{\text{anel}} \mathbf{v}_r \cdot \mathbf{n} dA = -\frac{k\rho}{\mu} \frac{1}{r} \frac{p_e - p_w}{\ln(r_e/r_w)} (2\pi r h) = -\frac{2\pi h k \rho}{\mu} \frac{p_e - p_w}{\ln(r_e/r_w)}$$



Consequência da hipótese de incompressibilidade

Tratamento de Poços

- Relação entre a pressão p em um raio r , a pressão no poço p_w ($r = r_w$) e a vazão volumétrica Q (assumindo todas as hipóteses anteriores):

$$p(r) = p_w + \frac{Q\mu}{2\pi hk} \ln\left(\frac{r}{r_w}\right)$$

Tratamento de Poços

- A pressão calculada pelo simulador para a célula contendo o poço não aproxima bem o comportamento singular da pressão na proximidade dos poços
- Em particular, uma boa aproximação para a pressão de fluxo nos poços é extremamente importante para determinação das condições de elevação do fluido, além de outras considerações de interesse prático (p.ex. pressão de fraturamento em poços de injeção)

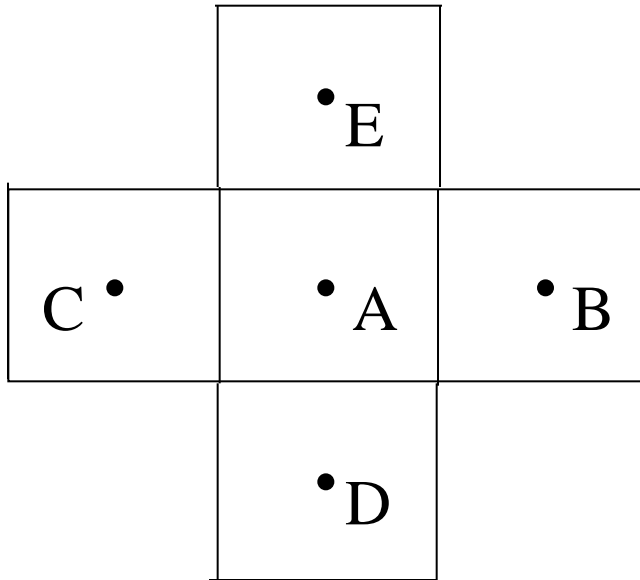
Tratamento de Poços

- Um outro aspecto a considerar é que as condições de operação dos poços podem ser especificadas em função da pressão e não vazão
- Além disso, para poços atravessando várias células a vazão total é especificada, já que não há como especificar a vazão individual em cada célula, e uma equação adicional é introduzida e uma variável adicional é necessária
- Essa variável é a pressão de fundo de poço (voltaremos a esse tópico em breve)

Tratamento de Poços

- A forma clássica para calcular a pressão de fundo de poço é através do modelo de poço de Peaceman, que compara o perfil de pressão analítico (logarítmico) com o numérico
- Além das mesmas hipóteses envolvidas na obtenção da solução logarítmica, o modelo de Peaceman clássico assume malha uniforme e que as células vizinhas à do poço não sofrem influência de outras áreas do reservatório e, portanto, têm a mesma pressão

Poço produzindo com
vazão Q no centro da
célula A



Solução numérica

$$\frac{T_{AB}}{\mu} (p_B - p_A) - \frac{T_{AC}}{\mu} (p_A - p_C) +$$

$$\frac{T_{AE}}{\mu} (p_E - p_A) - \frac{T_{AD}}{\mu} (p_A - p_D) + Q = 0$$

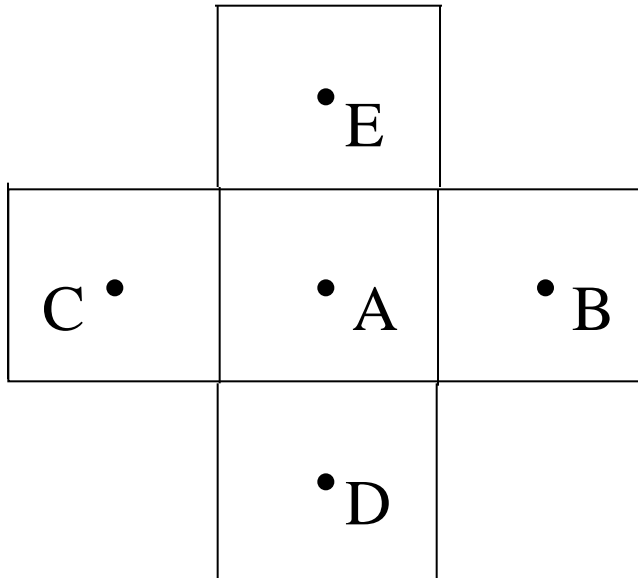
Propriedades homogêneas:

$$T_{AB} = T_{AC} = T_{AE} = T_{AD} = T = kh$$

$$p_B \approx p_C \approx p_D \approx p_E$$

$$4 \frac{T}{\mu} (p_B - p_A) + Q = 0 \Rightarrow p_B - p_A = -\frac{\mu Q}{4T} = -\frac{\mu Q}{4kh}$$

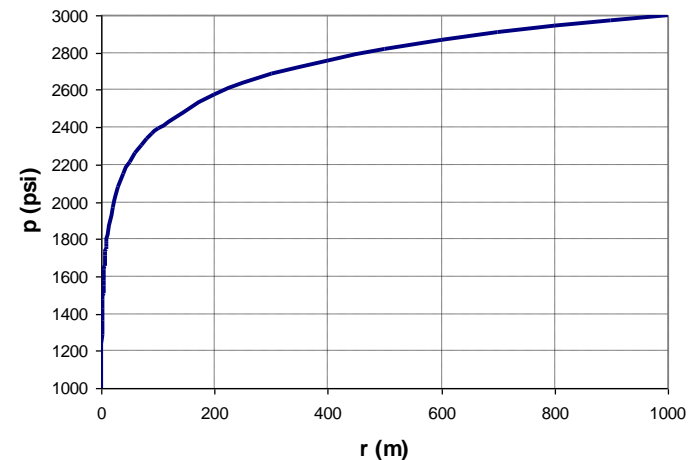
Poço produzindo com vazão Q no centro da célula A



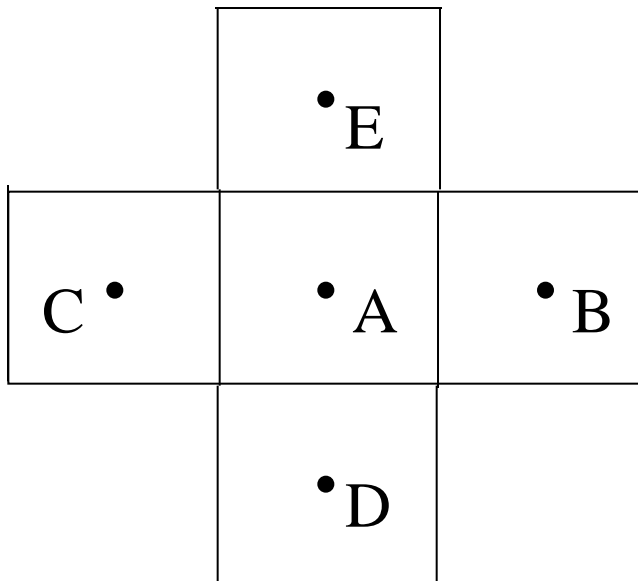
Solução analítica

$$Q = -\frac{2\pi kh}{\mu} \frac{p_B - p_A}{\ln\left(\frac{\Delta x}{r_{eq}}\right)} \Rightarrow$$

$$p_B - p_A = -\frac{\mu Q}{2\pi kh} \ln\left(\frac{\Delta x}{r_{eq}}\right)$$



Poço produzindo com
vazão Q no centro da
célula A



Igualando numérico e analítico:

$$-\frac{\mu Q}{4kh} = -\frac{\mu Q}{2\pi kh} \ln\left(\frac{\Delta x}{r_{eq}}\right) \Rightarrow$$
$$r_{eq} = e^{-\pi/2} \Delta x \approx 0.208 \Delta x$$

Raio equivalente: distância ao poço
onde a pressão calculada
numericamente na célula do poço
corresponderia ao valor obtido do perfil
logarítmico de queda de pressão da
solução analítica

Tratamento de Poços

- Vazão em função da diferença entre a pressão na célula e no interior do poço

$$Q = \frac{2\pi kh}{\mu} \frac{p_A - p_{wf}}{\ln\left(\frac{r_w}{r_{eq}}\right)}$$

- Um fator de skin S pode ser adicionado para levar em consideração dano ($S > 0$) ou estimulação ($S < 0$)

$$Q = \frac{2\pi kh}{\mu} \frac{p_A - p_{wf}}{\ln\left(\frac{r_w}{r_{eq}}\right) + S}$$

Tratamento de Poços

- A vazão de produção/injeção está associada à diferença de pressão entre a célula e o poço por um “modelo de poço” da forma

$$Q = \frac{WI}{\mu} (p_A - p_{wf}), \quad WI = \frac{2\pi kh}{\ln\left(\frac{r_w}{r_{eq}}\right) + S}$$

- WI é o “índice do poço” (“well index”) dependente apenas da geometria e permeabilidade da célula, do raio do poço e de sua localização e orientação na célula

Tratamento de Poços

- Para um poço vertical em uma malha de dimensões Δx e Δy e permeabilidades k_x e k_y , a fórmula de Peaceman é a opção padrão em todos os simuladores comerciais:

$$WI = \frac{2\pi (k_x k_y)^{1/2} h}{\ln\left(\frac{r_{eq}}{r_w}\right) + S}$$

$$r_{eq} = 0,28 \frac{\left(\left(\frac{k_y}{k_x} \right)^{1/2} \Delta x^2 + \left(\frac{k_x}{k_y} \right)^{1/2} \Delta y^2 \right)^{1/2}}{\left(\frac{k_y}{k_x} \right)^{1/4} + \left(\frac{k_x}{k_y} \right)^{1/4}}$$

Tratamento de Poços

- Versões da fórmula de Peaceman para situações ligeiramente mais genéricas existem (p.ex. poço não alinhado com a malha), mas as limitações inerentes dessa abordagem fazem com que não gere boas aproximações quando os poços ou a malha apresentam geometria complexa
- Nestes casos, uma abordagem descrita na literatura envolve a comparação entre uma solução de referência (numérica em malha fina ou semi-analítica) e uma solução numérica (estacionária) na malha de interesse

Tratamento de Poços

- Para maiores detalhes ver
 - Wolfsteiner, Durlofsky & Aziz, Calculation of well index for nonconventional wells on arbitrary grids, *Computational Geosciences*, 2003
 - Palagi & Aziz, Handling of wells in reservoir simulation, *4th International Forum on Reservoir Simulation*, Salzburg, Austria, 1992
 - Aavatsmark & Klausen, Well index in reservoir simulation for slanted and slightly curved wells in 3D grids, *SPE Journal*, 2003

Tratamento de Poços

- Voltamos agora à questão de poços atravessando várias células da malha
- Em cada uma dessas células vale o modelo de poço

$$Q_k = \frac{WI_k}{\mu_k} (p_k - p_{wf_k})$$

- Se a vazão total é especificada, então uma equação adicional é incluída no sistema

$$Q^{esp} = \sum_{k \in I_w} Q_k = \sum_{k \in I_w} \frac{WI_k}{\mu_k} (p_k - p_{wf_k})$$

Tratamento de Poços

- A pressão de fluxo em uma das células (“pressão de fundo de poço”) é a variável a ser determinada e que é alinhada com essa nova equação
- As demais pressões são determinadas por um algum modelo (simplificado) de escoamento em tubulações
- O modelo mais simples (e mais utilizado) considera apenas o peso da coluna hidrostática

$$P_{wf_k} = P_{wf_{ref}} + \bar{\rho}_k g (z_k - z_{ref})$$

- A dependência de ρ com a pressão é usualmente tratada de forma explícita

Escoamento Compressível

- Trataremos agora do problema monofásico mais geral, considerando a dependência não linear da porosidade e das propriedades de fluido com a pressão e o tratamento de poços descrito anteriormente
- EDP a ser resolvida

$$\frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t} - \nabla \cdot \left(\frac{\rho k}{\mu} (\nabla p + \rho \mathbf{g}) \right) - (\rho q) = 0$$

$$\phi = \phi(p), \quad \rho = \rho(p) \text{ e } \mu = \mu(p)$$

- Aplicando o formalismo do MVF com tratamento implícito dos termos temporais, o balanço de massa em uma célula i é dado por

$$V_i \frac{(\phi\rho)_i^{n+1} - (\phi\rho)_i^n}{\Delta t^n} + \sum_{k \in \chi_i} \lambda_{ik}^{n+1} T_{ik} \left(p_i^{n+1} - p_k^{n+1} + \rho_{ik}^{n+1} (z_i - z_k) \right) - \lambda_{w_i}^{n+1} W I_i \left(p_i^{n+1} - p_{wf_k}^{n+1} \right) = 0$$

χ_i conjunto dos índices dos vértices vizinhos à i

$\lambda_{ik} = \left(\frac{\rho}{\mu} \right)_{ik}$ = mobilidade mássica avaliada na face entre as células i e k

ρ_{ik} = densidade avaliada na face entre as células i e k

$\lambda_{w_i} = \left(\frac{\rho}{\mu} \right)_{w_i}$ = mobilidade mássica na face do poço

Escoamento Compressível

- λ_{ik} e ρ_{ik} são avaliados por uma média dos valores nas células i e k
- A mobilidade no poço é avaliada de acordo com o tipo de poço, injetor ou produtor
- As pressões nos poços são relacionadas com uma pressão de referência

$$p_{wf_k} = h \left(p_{wf_{ref}} \right)$$

Considerando apenas forças gravitacionais (equilíbrio hidrostático)

$$p_{wf_k} = p_{wf_{ref}} + \bar{\rho}_k^n g (z_k - z_{ref})$$

Escoamento Compressível

- Dois tipos básicos de especificação das condições de operação dos poços (pressão ou vazão especificada)
- Pressão especificada $p_{wf_{ref}} = p_w^{esp}$
- Para vazão especificada, uma nova equação aparece para determinação da variável $p_{wf_{ref}}$

$$Q^{esp} = \sum_{k \in I_w} Q_k = \sum_{k \in I_w} \frac{1}{\rho_{sc}} \lambda_{w_k}^{n+1} W I_k \left(p_k^{n+1} - p_{wf_k}^{n+1} \right)$$

Escoamento Compressível

- A escolha do tamanho do passo de tempo Δt^n é geralmente feita por um procedimento simples que procura ajustá-lo a “variações esperadas” de pressão no passo através de extrapolação linear
- As equações de balanço de massa mais a especificação de operação dos poços formam um conjunto de equações algébricas não lineares que deve ser resolvido para determinar as pressões em cada célula e pressões de referência em cada poço (pressão de fundo de poço)

Breve Descrição de Métodos de Solução

- A solução eficiente dos sistemas algébricos (lineares e não lineares) resultantes da discretização das equações de balanço é tarefa crucial para o sucesso de um simulador, em particular pela demanda por malhas cada vez mais refinadas e a modelagem de processos físicos complexos
- Em particular, a utilização adequada do *hardware* paralelo existente nas máquinas modernas deve ser cuidadosamente considerada

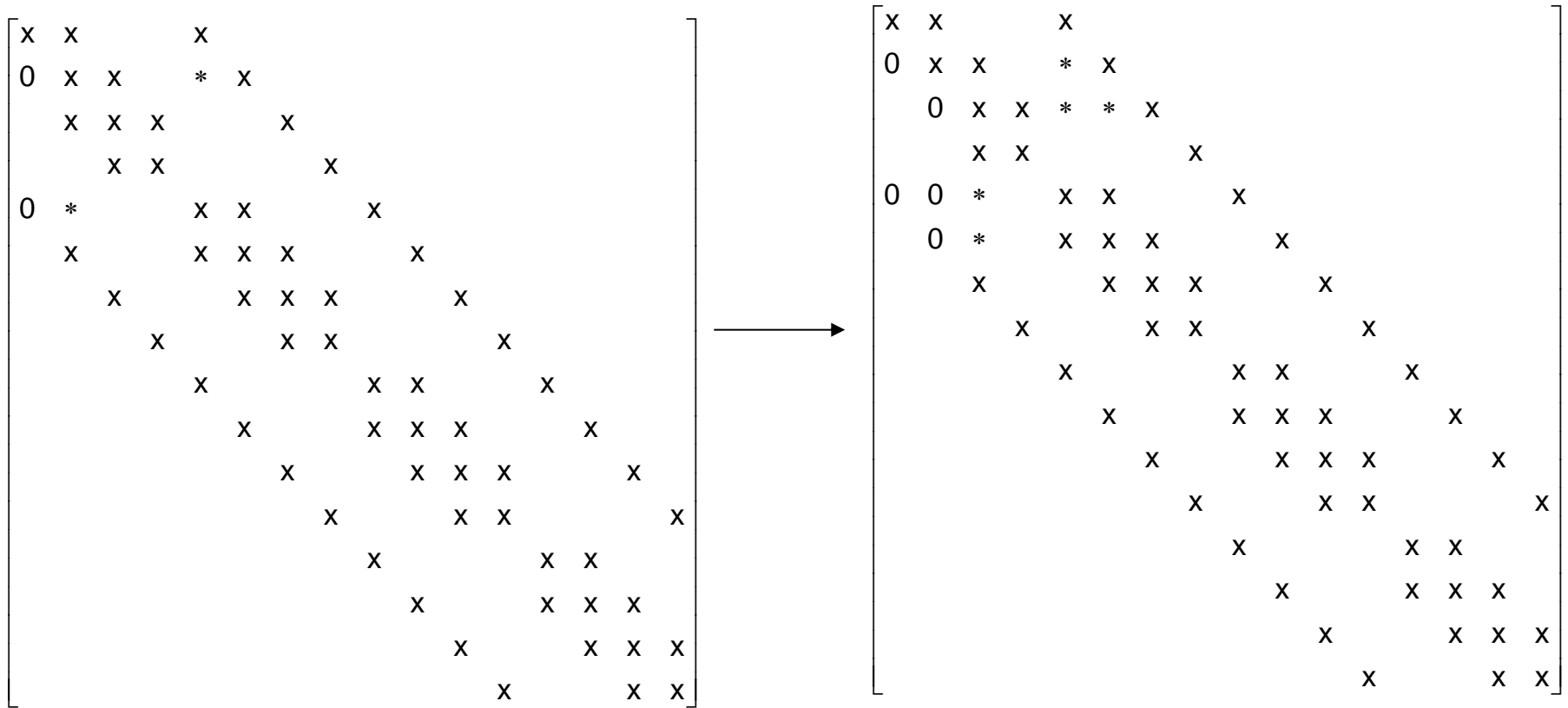
Breve Descrição de Métodos de Solução

- Este é um tópico especializado de grande interesse na literatura e na indústria, cuja descrição detalhada exigiria um curso à parte
- Neste curso, será feita uma breve apresentação dos métodos de solução mais utilizados, de caráter mais informacional

Breve Descrição de Métodos de Solução

- A característica mais marcante dos sistemas lineares resultantes da discretização de EDPs, do ponto-de-vista da resolução eficiente, é que as matrizes são altamente esparsas, ou seja, possuem poucos elementos não-nulos
- Para uma malha 100×100 , a matriz possui 10^8 elementos, mas menos de 50000 não nulos (menos de 0,05%)
- Infelizmente, o processo de solução direta por eliminação gaussiana gera uma grande quantidade de não nulos

- Segundo passo de eliminação gaussiana: usar a segunda linha para zerar os não nulos da segunda coluna



- Para uma malha $N \times N$, são necessários aproximadamente N^3 posições de memória para armazenar os fatores LU
- Para uma malha 100×100 , 10^6 ao invés das 50000 originais
- Em termos de esforço computacional, a situação é ainda pior, já que o custo para resolver o sistema é em torno de N^4
- Estes resultados são influenciados pela numeração das células

| | | | |
|----|----|----|----|
| 1 | 9 | 2 | 10 |
| 11 | 3 | 12 | 4 |
| 5 | 13 | 6 | 14 |
| 15 | 7 | 16 | 8 |

Ordenamento *Red-Black*

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|--|--|---|---|---|---|---|
| x | | | | | | | | | x | x | | | |
| | x | | | | | | | | x | x | x | | |
| | | x | | | | | | | x | x | x | x | |
| | | | x | | | | | | | x | x | | x |
| | | | | x | | | | | | | x | x | x |
| | | | | | x | | | | | | | x | x |
| | | | | | | x | | | | | | | x |
| x | x | x | | | | | | | x | | | | |
| | x | | x | | | | | | | x | | | |
| x | | x | | x | | | | | | | x | | |
| | x | x | x | | x | | | | | | | | |
| | | x | | x | x | x | | | | | x | | |
| | | | x | | x | | | | | | | | x |
| | | | | x | x | x | | | | | | | |

Breve Descrição de Métodos de Solução

- O aparecimento de preenchimentos reduz a aplicabilidade de métodos diretos a problemas de pequeno porte e métodos iterativos são os mais utilizados
- Em um método iterativo, parte-se de uma estimativa inicial \mathbf{x}_0 e obtém-se aproximações \mathbf{x}_k progressivamente melhores
- Métodos de Krylov são os mais utilizados, especialmente GMRES e Orthomin
 - Gradientes conjugados apenas para problemas simétricos

Breve Descrição de Métodos de Solução

- Em cada iteração, \mathbf{x}_k é a projeção da solução no espaço de Krylov gerado por $\mathbf{r}_0, \mathbf{A}\mathbf{r}_0, \mathbf{A}^2\mathbf{r}_0, \dots$
- Em problemas não-simétricos, é necessário armazenar uma base para o espaço de Krylov, de forma que métodos práticos envolvem interrupção do processo em um número pequeno de passos e *restart* a partir da última aproximação obtida
- A eficiência do processo iterativo é fundamentalmente determinada pela escolha de um pré-condicionador apropriado

- “Pré-condicionar” significa transformar o sistema original em outro de mais fácil resolução

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \mathbf{M}^{-1}\mathbf{Ax} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b} \text{ (pré-condicionador à esquerda)} \\ \mathbf{AM}^{-1}\mathbf{y} = \mathbf{b}, \mathbf{y} = \mathbf{Mx} \text{ (pré-condicionador à direita)} \end{array}$$

- O pré-condicionador \mathbf{M} deve ser escolhido para que
 - \mathbf{M} seja uma boa aproximação para \mathbf{A}
 - Sistemas com \mathbf{M} sejam fáceis (“baratos”) de resolver
- A obtenção de bons pré-condicionadores é uma questão não trivial e envolve características especiais do problema a ser resolvido

Breve Descrição de Métodos de Solução

- Um pré-condicionador genérico e bastante utilizado consiste em fatorações incompletas (ILU), onde ignoram-se a maior parte dos preenchimentos que aparecem no processo de eliminação gaussiana
- Outros pré-condicionadores populares utilizam a aproximações por blocos (“*nested-factorization* é um exemplo característico na área) e aproximações diretas para a inversa de \mathbf{A}

Breve Descrição de Métodos de Solução

- Aspectos ligados a processamento paralelo são essenciais para um bom pré-condicionador
- Como processamento paralelo melhora quanto mais desacoplado o algoritmo, para problemas em que haja acoplamento espacial muito forte, desenvolver bons pré-condicionadores paralelos é um desafio
- Técnicas de decomposição de domínios são muito utilizadas, sendo comum a introdução de um “espaço grosseiro” para garantir que não haja muita deterioração da convergência pelo tratamento isolado dos domínios

- Para resolução das equações não lineares, o método de Newton é o mais utilizado

$$\mathbf{F}: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} f_1(x_1, \dots, x_N) \\ \vdots \\ f_N(x_1, \dots, x_N) \end{bmatrix}$$

Aproximação linear para \mathbf{F} : $\mathbf{L}_k(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{J}(\mathbf{x}_k)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k)$

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}_k) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \end{bmatrix}_{\substack{i=1, \dots, N \\ j=1, \dots, N}} = \text{jacobiano de } \mathbf{F}$$

$$\mathbf{x}_{k+1} \text{ escolhido tal que } \mathbf{L}_k(\mathbf{x}_{k+1}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{J}(\mathbf{x}_k)\Delta\mathbf{x}_k = -\mathbf{F}(\mathbf{x}_k) \\ \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \Delta\mathbf{x}_k \end{cases}$$

- Requer a solução de um sistema linear a cada iteração
- A convergência é apenas local, mas com taxa quadrática, ou seja, o método é muito eficiente quando se está próximo da solução mas pode falhar quando afastado
- Aplicação à discretização da equação da pressão:
 - ✓ Uma boa estimativa inicial está disponível: o valor de pressão no passo de tempo anterior
 - ✓ Se o método de Newton falhar, é possível repetir o passo de tempo reduzindo Δt de forma a obter uma melhor estimativa inicial
 - ✓ A estrutura do Jacobiano é a mesma do problema linear, podendo ser aplicadas as mesmas técnicas discutidas anteriormente

UNIVERSIDADE

Introdução à Simulação de Reservatórios Petrolíferos

Prof. José Roberto P. Rodrigues
(PETROBRAS/CENPES)

Programa de Verão LNCC – Fevereiro de 2015

Escoamento Bifásico – Formulação Matemática

- Tópicos
 - Conceitos básicos
 - Pressão capilar e permeabilidade relativa
 - Equações para escoamento bifásico
 - Análise do comportamento
 - Problema de Buckley-Leverett
 - Efeito do termo difusivo

Escoamento Multifásico: Conceitos Básicos

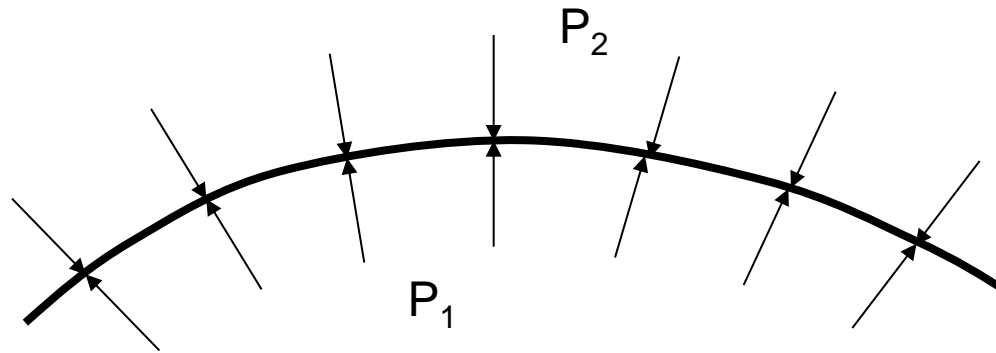
- Tipos de escoamento multifásico:
 - ✓ Deslocamento miscível: os fluidos são completamente solúveis, não formando uma interface entre eles (uma única fase). Ex.: injeção de água do mar (salgada) em um reservatório com água original (doce)
 - ✓ Deslocamento imiscível: há uma clara interface entre os fluidos; não há transferência de massa entre as fases. Ex.: injeção de água em um reservatório de óleo
- Neste curso trataremos apenas de escoamentos imiscíveis
- Saturação é a fração volumétrica de uma fase no volume poroso total

$$S_f = \frac{V_f}{V_p}$$

- Note que $\sum_f S_f = 1$

Pressão Capilar

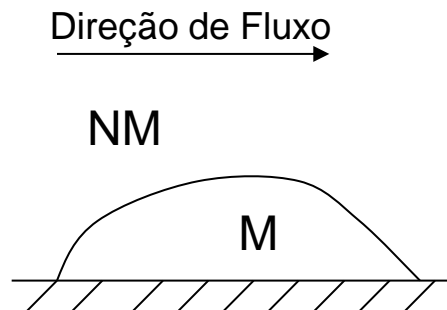
- Interação molecular entre os fluidos entre si e com o sólido geram tensão interfacial
- Devido à esta tensão interfacial, existe uma diferença de pressão ao longo da interface entre as fases



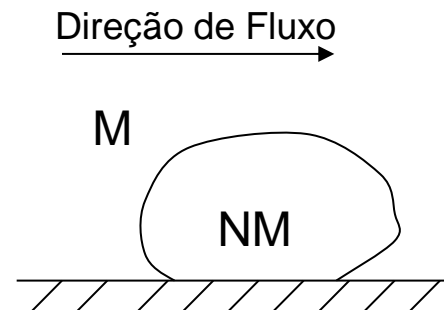
- $P_1 - P_2$ é função da tensão interfacial e da curvatura da interface

Pressão Capilar

- No escoamento bifásico (óleo-água, p.ex.) uma das fases adere preferencialmente à rocha (fase molhante)



Drenagem: fase não-molhante desloca a molhante

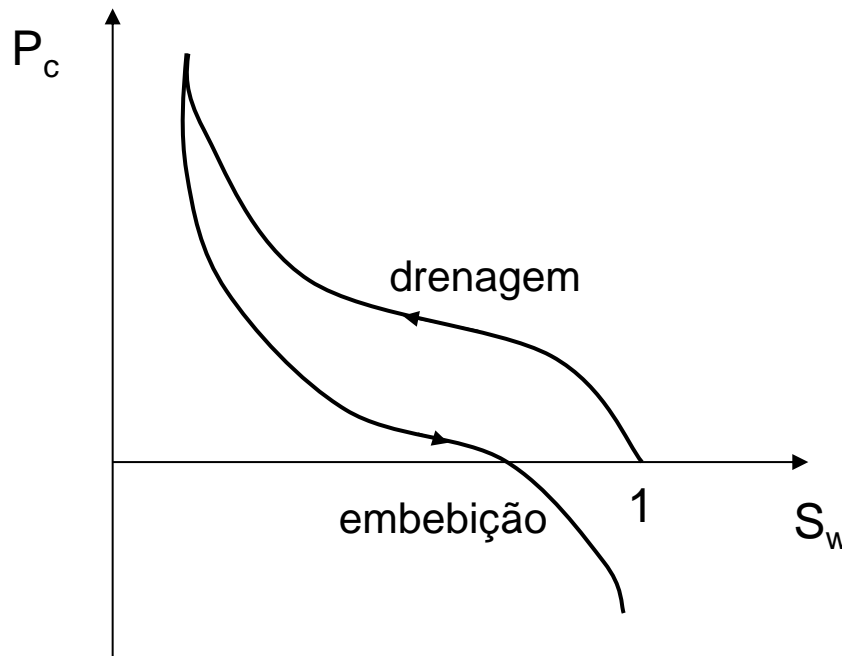


Embebição: fase molhante desloca a não-molhante

- Tipicamente, em escoamentos água-óleo, a água é a fase molhante e o óleo a fase não-molhante
- Usaremos os subscritos w (água) e o (óleo) para denotar as fases molhante e não-molhante

Pressão Capilar

- No escoamento bifásico a geometria da interface entre as fases varia com a saturação
- A pressão capilar é uma função da saturação: $P_c(S_w) = P_o - P_w$ que é medida em laboratório



A curva de pressão capilar apresenta dependência com a história do deslocamento (histerese)

Permeabilidade Relativa

- No escoamento bifásico, as fases têm velocidades distintas e assume-se que a lei de Darcy vale em cada uma delas

$$\vec{v}_w = -\frac{k_w}{\mu_w} \nabla \Phi_w = -\frac{k_w}{\mu_w} (\nabla p_w + \rho_w \vec{g})$$

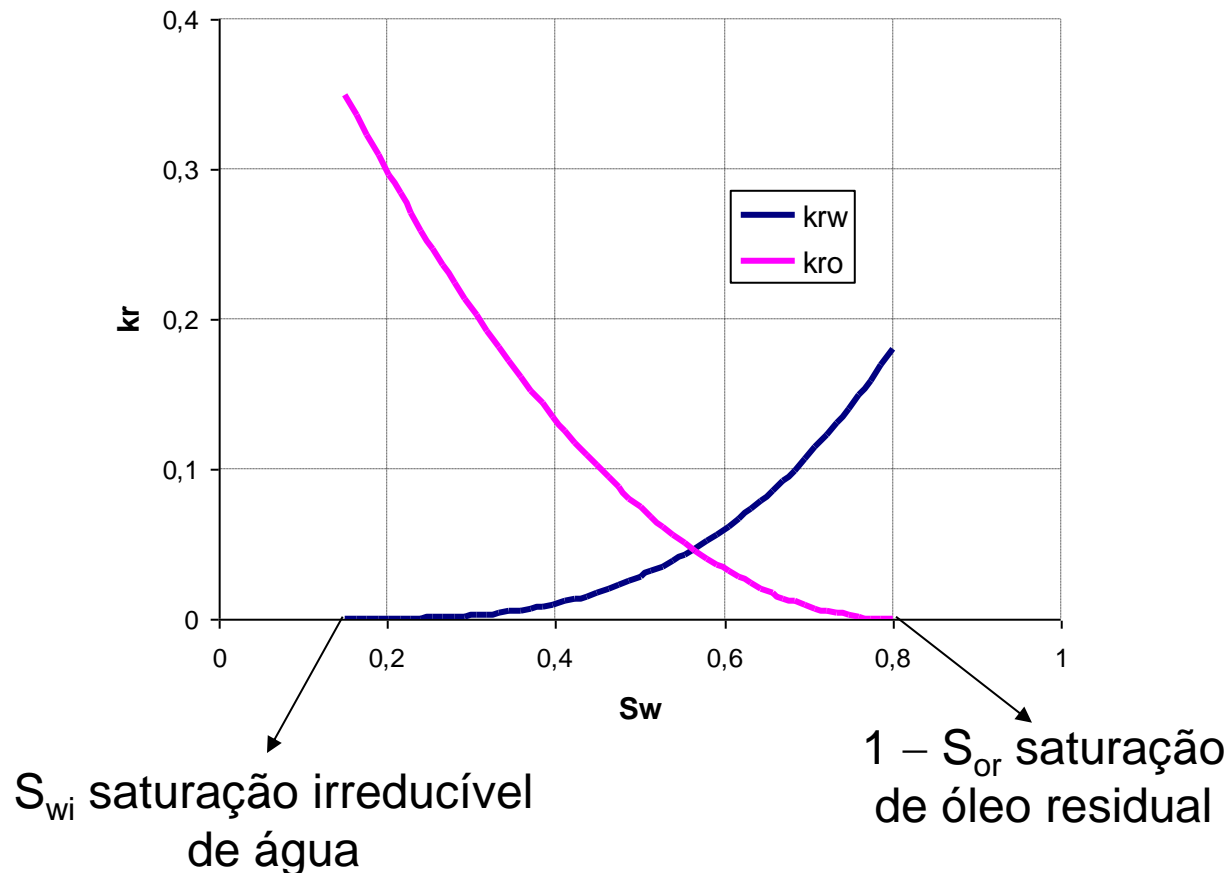
$$\vec{v}_o = -\frac{k_o}{\mu_o} \nabla \Phi_o = -\frac{k_o}{\mu_o} (\nabla p_o + \rho_o \vec{g})$$

- k_w e k_o são as permeabilidades efetivas à água e ao óleo e dependem não só da interação entre fluido e rocha, mas também do impacto relativo que a presença de um fluido causa ao escoamento do outro
- É comum normalizar as permeabilidades efetivas de cada fase pela permeabilidade absoluta k e definir permeabilidades relativas

$$k_{rw} = \frac{k_w}{k} \text{ e } k_{ro} = \frac{k_o}{k}, 0 \leq k_{rw}, k_{ro} \leq 1$$

Permeabilidade Relativa

- As permeabilidades relativas são consideradas funções das saturações e medidas em laboratório $k_{rw} = k_{rw}(S_w)$ e $k_{ro} = k_{ro}(S_w)$



Permeabilidade Relativa

- Tipicamente, $0,1 \leq S_{wi} \leq 0,3$ e $0,2 \leq S_{or} \leq 0,4$
- As curvas de permeabilidade relativa também podem apresentar histerese
- O conceito se justifica melhor em sistemas com molhabilidade bem definida
- Apesar de controversas, as curvas de permeabilidade relativas são universalmente utilizadas na modelagem do escoamento bifásico em reservatórios de petróleo

Equações para Escoamento Bifásico

- Vamos derivar as equações governantes do escoamento bifásico imiscível em meios porosos
- O princípio de conservação de massa é aplicado individualmente a cada fluido

$$\frac{\partial(\phi\rho_w S_w)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_w \vec{v}_w) - (\rho_w q_w) = 0 \quad \text{Conservação de massa para água}$$

$$\frac{\partial(\phi\rho_o S_o)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_o \vec{v}_o) - (\rho_o q_o) = 0 \quad \text{Conservação de massa para óleo}$$

- Exceto pelos subscritos, a única diferença em relação ao caso monofásico é presença da saturação no termo de acumulação
- A velocidade da água só aparece na equação da água e a do óleo só na fase óleo: consequência da imiscibilidade
- Se houvesse transferência de massa entre as fases, deveria se levar em conta o escoamento da massa de cada componente dissolvida nas duas fases

Equações para Escoamento Bifásico

Reescrevendo a lei de Darcy para cada fase

$$\vec{v}_w = -\frac{k k_{rw}}{\mu_w} (\nabla p_w + \rho_w \vec{g}) = -k \lambda_w (\nabla p_o + \rho_w \vec{g} - \nabla P_c)$$

$$\vec{v}_o = -\frac{k k_{ro}}{\mu_o} (\nabla p_o + \rho_o \vec{g}) = -k \lambda_o (\nabla p_o + \rho_o \vec{g})$$

$$\lambda_w = \frac{k_{rw}}{\mu_w} \text{ e } \lambda_o = \frac{k_{ro}}{\mu_o} \text{ são as mobilidades das fases}$$

Equações para Escoamento Bifásico

Substituindo nas equações de balanço de massa

$$\frac{\partial(\phi\rho_w S_w)}{\partial t} - \nabla \cdot (\rho_w k \lambda_w (\nabla p_o + \rho_w \vec{g} - \nabla P_c)) - (\rho_w q_w) = 0$$

$$\frac{\partial(\phi\rho_o S_o)}{\partial t} - \nabla \cdot (\rho_o k \lambda_o (\nabla p_o + \rho_o \vec{g})) - (\rho_o q_o) = 0$$

Em geral, na equação acima assumimos:

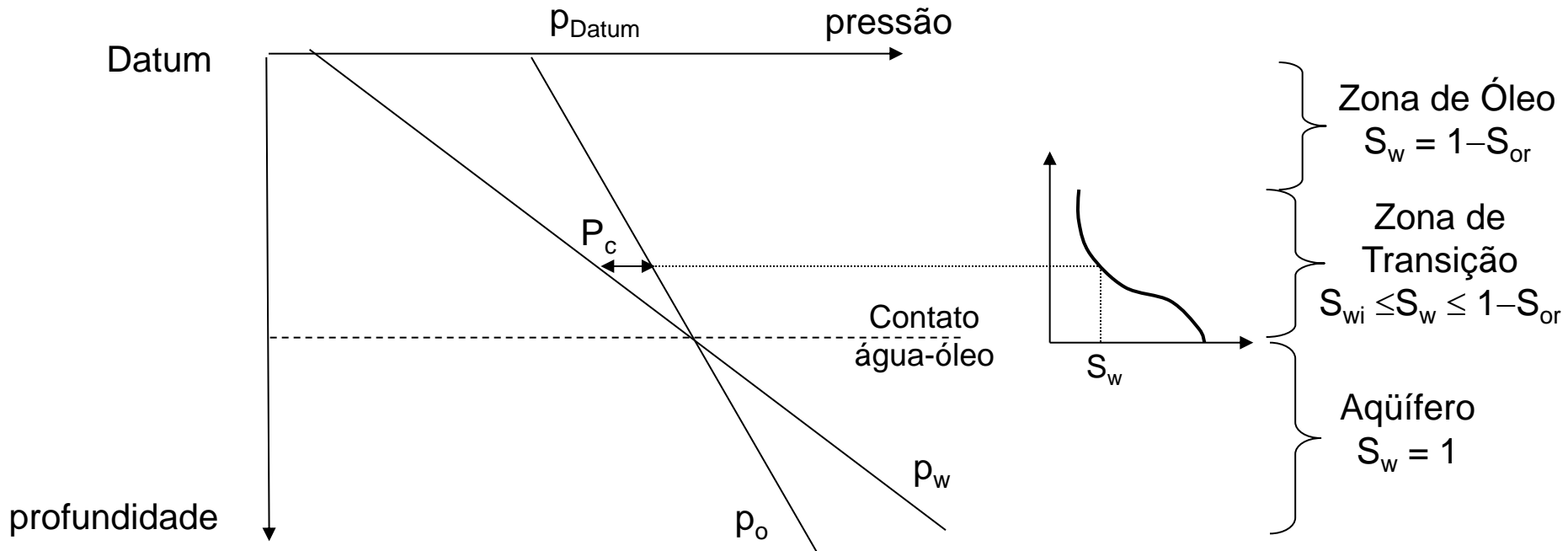
- $k = k(x)$ é um tensor diagonal
- $\rho_f = \rho_f(p_o)$, $\mu_f = \mu_f(p_o)$, $f = w, o$, e $\phi = \phi(p_o)$
- $k_{rf} = k_{rf}(S_w)$, $f = w, o$, e $P_c = P_c(S_w)$

Lembrando a relação $S_w + S_o = 1$ restam p_o e S_w como incógnitas

Equações para Escoamento Bifásico

É necessário ainda especificar condições iniciais e de fronteira:

- A condição inicial para a pressão é semelhante ao caso monofásico, isto é, equilíbrio hidrostático
- Para a saturação é usual especificar o contato água-óleo e dividir o reservatório em três zonas: aquífero, transição e óleo



Análise das Equações

- As equações apresentadas constituem um sistema de EDP's não lineares extremamente complexo
- Um exame superficial das equações levaria a supor que o comportamento do problema é semelhante ao caso monofásico
- Veremos que isto é verdade para a pressão, mas não para a saturação
- Para tanto analisaremos algumas situações particulares e discutiremos algumas soluções analíticas explícitas para problemas de interesse
- Obs.: escreveremos $S = S_w$ (note que $S_o = 1 - S_w$)

Análise das Equações

- Ignorando efeitos gravitacionais e a presença de fontes e sumidouros e assumindo incompressibilidade da rocha e dos fluidos ($\phi = \text{cte}$ e $\rho_f = \text{cte}$, $f=w,o$):

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} - \nabla \cdot (k \lambda_w \nabla p_w) = 0$$

$$\phi \frac{\partial (1-S)}{\partial t} - \nabla \cdot (k \lambda_o \nabla p_o) = 0$$

- Somando as duas equações (balanço de massa total de fluido):

$$-\nabla \cdot (k(\lambda_w \nabla p_w + \lambda_o \nabla p_o)) = 0$$

⇓

$$\nabla \cdot \left(k \lambda_t \left(\frac{\lambda_w}{\lambda_t} \nabla p_w + \frac{\lambda_o}{\lambda_t} \nabla p_o \right) \right) = 0$$

$$\lambda_t = \lambda_w + \lambda_o = \text{mobilidade total}$$

Análise das Equações

Gostaria de definir uma pressão média p_m para transformar

$$\frac{\lambda_w}{\lambda_t} \nabla p_w + \frac{\lambda_o}{\lambda_t} \nabla p_o, \quad (*)$$

que é uma média ponderada de ∇p_w e ∇p_o , em ∇p_m para que a equação se transformasse em

$$\nabla \cdot (k\lambda_t \nabla p_m) = 0 \quad \text{Equação de Laplace}$$

Para tanto, escrevemos (*) como um desvio em relação à média aritmética de ∇p_w e ∇p_o

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_w}{\lambda_t} \nabla p_w + \frac{\lambda_o}{\lambda_t} \nabla p_o &= \frac{1}{2} (\nabla p_w + \nabla p_o) + \left(\frac{\lambda_w}{\lambda_t} - \frac{1}{2} \right) \nabla p_w + \left(\frac{\lambda_o}{\lambda_t} - \frac{1}{2} \right) \nabla p_o = \\ &= \frac{1}{2} (\nabla p_w + \nabla p_o) + \frac{\lambda_w - \lambda_o}{2\lambda_t} \nabla p_w + \frac{\lambda_o - \lambda_w}{2\lambda_t} \nabla p_o = \\ &= \frac{1}{2} (\nabla p_w + \nabla p_o) + \frac{\lambda_o - \lambda_w}{2\lambda_t} \nabla P_c = \frac{1}{2} (\nabla p_w + \nabla p_o) + \frac{\lambda_o - \lambda_w}{2\lambda_t} P'_c \nabla S \end{aligned}$$

Análise das Equações

Defina $h(S) = \frac{\lambda_o - \lambda_w}{2\lambda_t} P'_c$ e $H(S) = \int \frac{\lambda_o - \lambda_w}{2\lambda_t} P'_c dS$ (primitiva de h)

Daí, $\nabla H(S) = H'(S)\nabla S = h(S)\nabla S = \frac{\lambda_o - \lambda_w}{2\lambda_t} P'_c \nabla S$

Finalmente,

$$\frac{\lambda_w}{\lambda_t} \nabla p_w + \frac{\lambda_o}{\lambda_t} \nabla p_o = \frac{1}{2} (\nabla p_w + \nabla p_o) + \nabla H = \nabla \left[\frac{1}{2} (p_w + p_o) + H \right]$$

A pressão média desejada é dada por $p_m = \frac{1}{2} (p_w + p_o) + H$

Análise das Equações

- A discussão acima mostrou que, semelhante ao caso monofásico, assumindo incompressibilidade, a pressão é governada pela equação de Laplace (comportamento elíptico)

$$\nabla \cdot (k\lambda_t \nabla p_m) = 0$$

- Note que, devido à dependência de λ_t em S , a equação acima é não-linear
- Para o caso de (pequena) compressibilidade, é possível mostrar que a pressão se comporta aproximadamente segundo uma equação parabólica
- É interessante definir a velocidade total como

$$\vec{v}_t = -k\lambda_t \nabla p_m$$

⇓

$$\nabla \cdot \vec{v}_t = 0$$

Condição de
Incompressibilidade

Análise das Equações

- Para analisar o comportamento da saturação, consideramos a equação de conservação da água

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} - \nabla \cdot (k \lambda_w \nabla p_w) = 0$$

- Da definição de p_m ,

$$\nabla p_m = \frac{1}{2} \nabla p_w + \frac{1}{2} \nabla p_o + \nabla H$$

⇓

$$\begin{aligned} \nabla p_w &= 2\nabla p_m - \nabla p_o - 2\nabla H = \nabla p_m + \left(\frac{1}{2} \nabla p_w + \frac{1}{2} \nabla p_o + \nabla H \right) - \nabla p_o - 2\nabla H = \\ &= \nabla p_m - \frac{1}{2} \nabla P_c - \nabla H = \nabla p_m - \frac{1}{2} \nabla P_c - h(S) \nabla S = \\ &= \nabla p_m - \frac{1}{2} P'_c \nabla S - \frac{\lambda_o - \lambda_w}{2\lambda_t} P'_c \nabla S = \nabla p_m - \frac{\lambda_o}{\lambda_t} P'_c \nabla S \end{aligned}$$

Análise das Equações

- Substituindo na equação

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} - \nabla \cdot \left(k \lambda_w \left(\nabla p_m - \frac{\lambda_o}{\lambda_t} P'_c \nabla S \right) \right) = 0$$

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} - \nabla \cdot \left(\frac{\lambda_w}{\lambda_t} (k \lambda_t \nabla p_m) \right) + \nabla \cdot \left(k \frac{\lambda_w \lambda_o}{\lambda_t} P'_c \nabla S \right) = 0$$

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + \underbrace{\nabla \cdot (f(S) \vec{v}_t)}_{\text{Termo Advectivo}} - \underbrace{\nabla \cdot (g(S) \nabla S)}_{\text{Termo Difusivo}} = 0$$

Termo
Advectivo

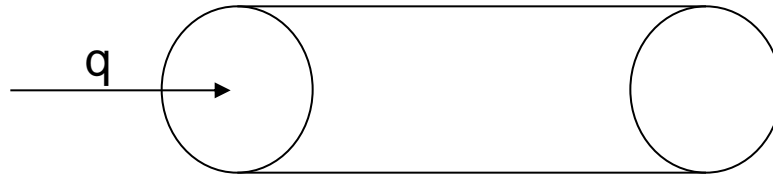
Termo
Difusivo

Equação da
Advecção-Difusão
Não-Linear

$$f(S) = \frac{\lambda_w}{\lambda_t} = \text{função fluxo fracionário}$$

Problema de Buckley-Leverett

- Vamos desprezar os efeitos capilares, e considerar o deslocamento de óleo por água injetada com vazão constante em uma amostra de área de seção constante, inicialmente preenchida com óleo



$$\frac{\partial}{\partial x} v_t(x, t) = 0$$

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (f(S) \vec{v}_t) = 0$$

$$v_t(0, t) = q/A$$

$$S(x, 0) = 0$$

$$S(0, t) = 1$$

Problema de Buckley-Leverett

- Da equação da pressão,

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} v_t(x,t) = 0 \\ v_t(0,t) = \frac{q}{A} \end{array} \right\} \Rightarrow v_t(x,t) = \frac{q}{A} = v$$

- Problema a ser resolvido para a saturação

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{v}{\phi} \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

$$S(x,0) = S_{wi}$$

$$S(0,t) = 1 - S_{or}$$

- A equação acima é uma lei de conservação não-linear que pode ser escrita

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{v}{\phi} f'(s) \frac{\partial S}{\partial x} = 0$$

Problema de Buckley-Leverett

- Vamos simplificar mais considerando o problema de Cauchy para a equação da advecção linear

$$\frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} = 0, u > 0 \text{ constante}$$

$$S(x,0) = S_o(x)$$

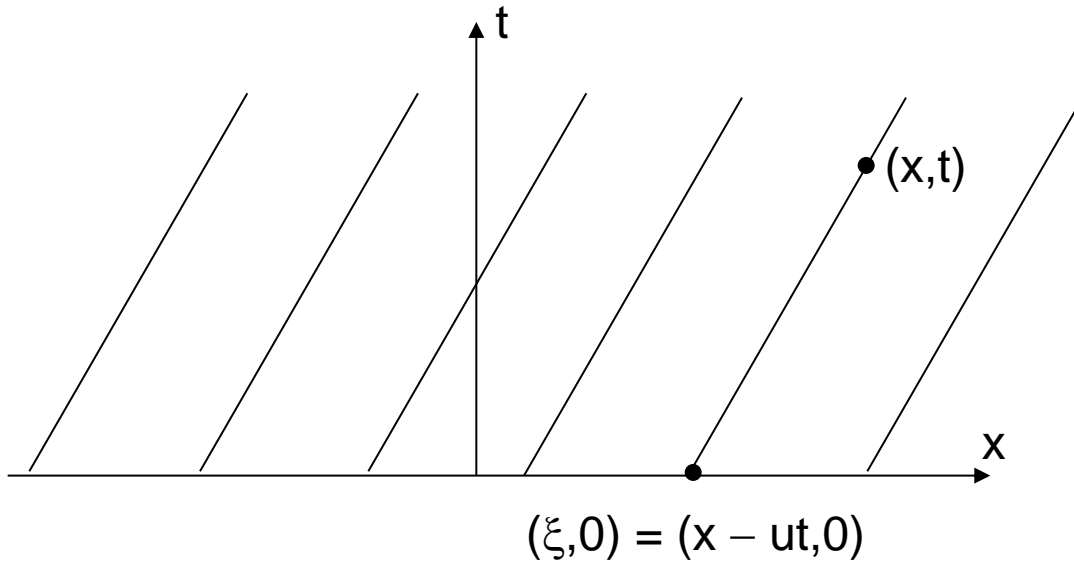
- As curvas $x = x(t)$ sobre as quais $S(x(t),t)$ é constante são as características

$$\frac{d}{dt} S(x(t),t) = 0 \Rightarrow \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial S}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = u$$

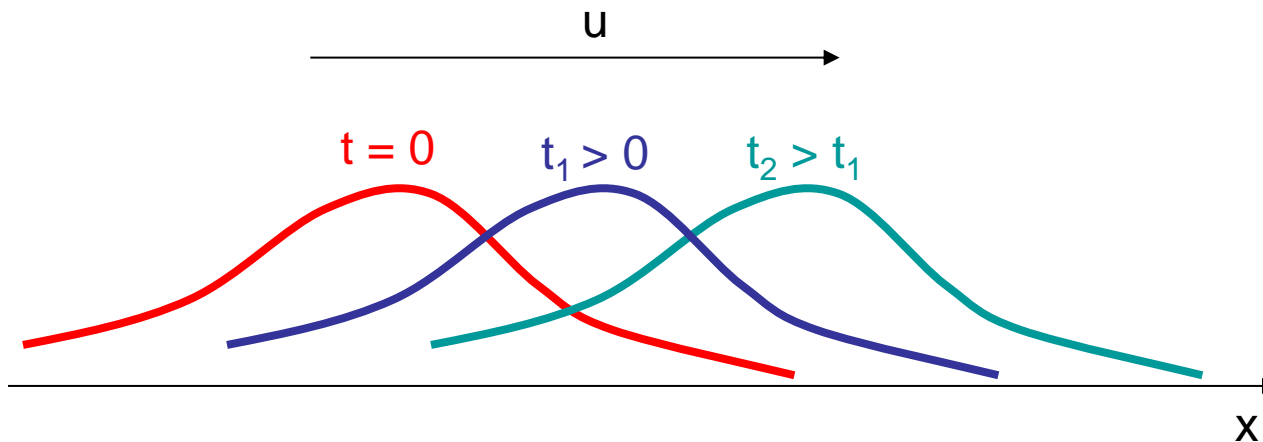
- As características são as retas $x - ut = \xi$, ξ constante
- A interseção com o eixo X ($t = 0$) é dada pelo ponto $(\xi,0)$

$$S(x,t) = S(\xi,0) = S_o(\xi) \Rightarrow S(x,t) = S_o(x - ut)$$

Problema de Buckley-Leverett



Características
no plano xt



Perfis de solução: a
condição inicial é
deslocada para direita
com velocidade u , sem
alteração da forma.

Velocidade de
Propagação Finita

Problema de Buckley-Leverett

- Problema de Buckley-Leverett

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{v}{\phi} f'(S) \frac{\partial S}{\partial x} = 0$$

$$S(x,0) = S_{wi}$$

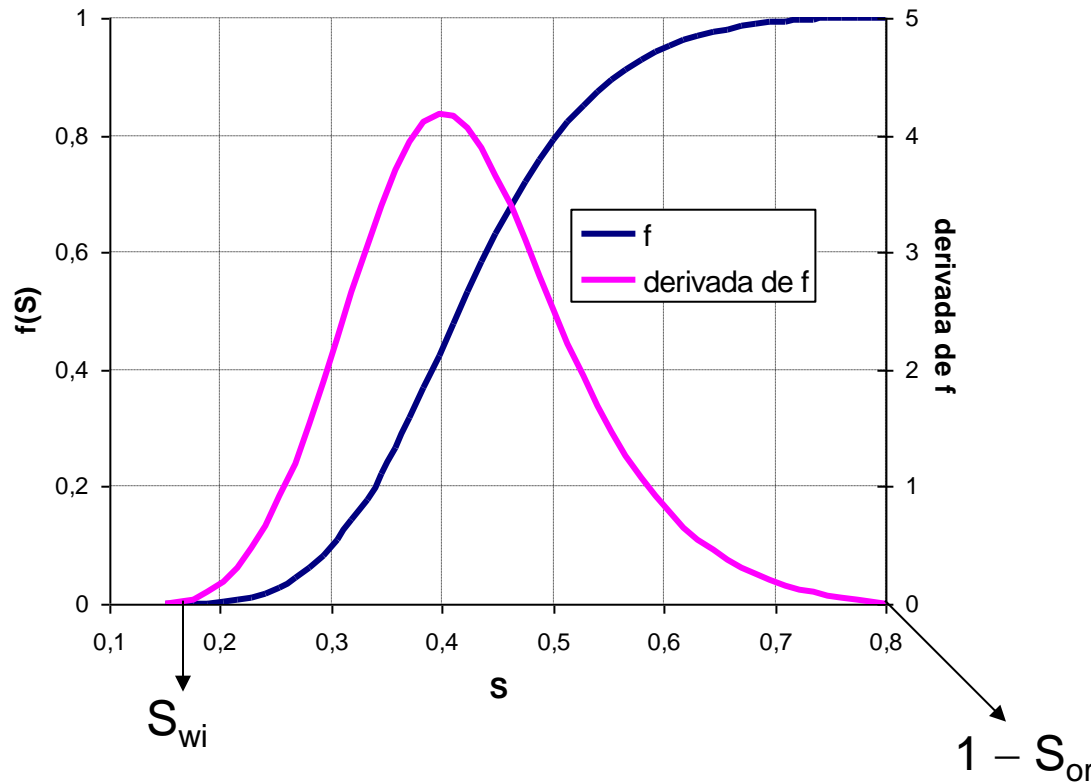
$$S(0,t) = 1 - S_{or}$$

- Curvas características

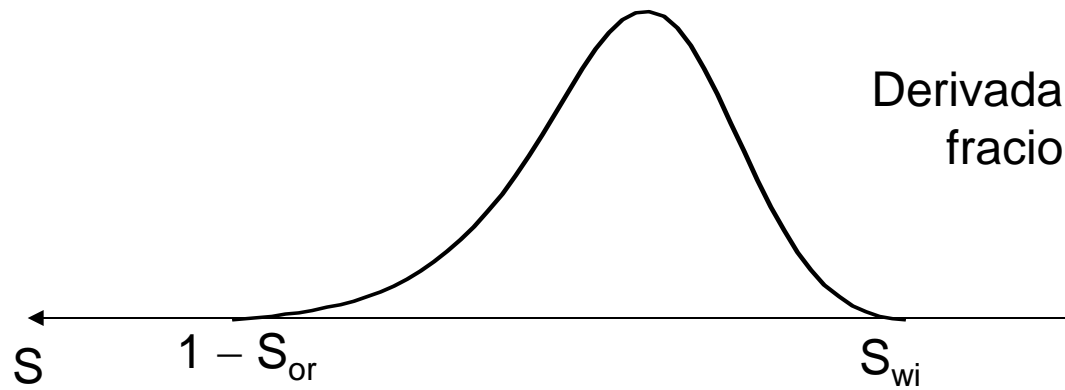
$$\frac{d}{dt} S(x(t),t) = 0 \Rightarrow \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial S}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{v}{\phi} f'(S) \Rightarrow x - \frac{v}{\phi} f'(S)t = \xi$$

- As características são retas (S constante ao longo das características)
- Ao contrário do caso linear, a inclinação das retas características não é constante
- As características podem se cruzar!!!

Problema de Buckley-Leverett

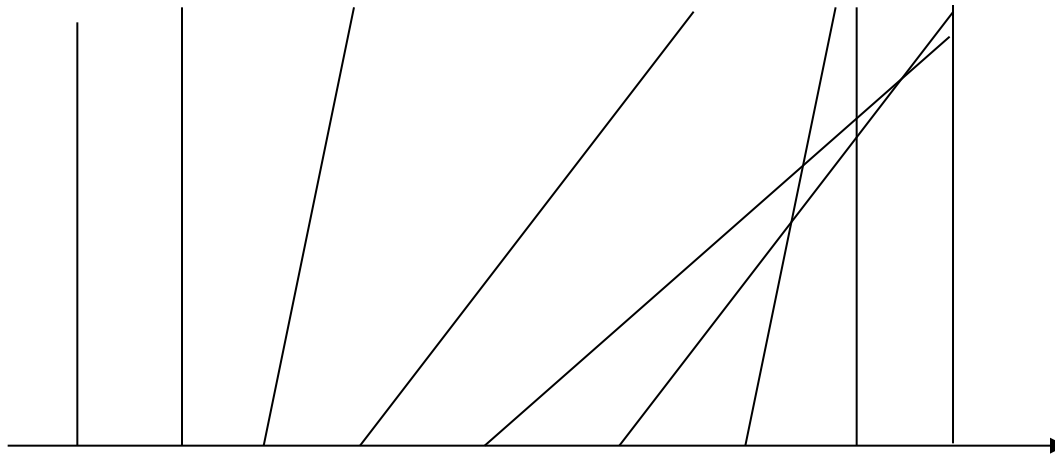


Curva de fluxo fracionário típica (formato de S) e derivada

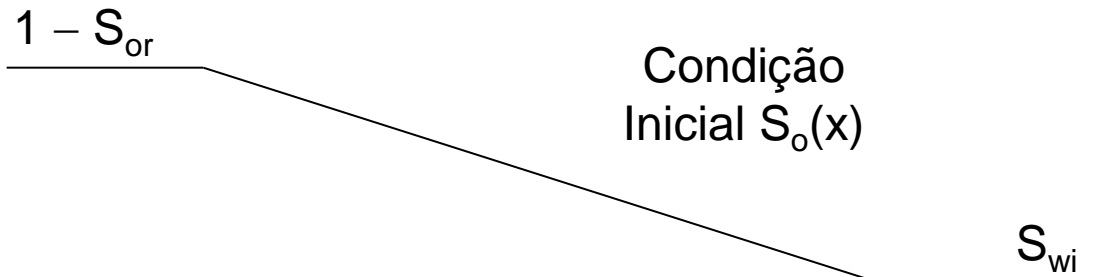


Derivada do fluxo fracionário

A inclinação das características no plano xt é proporcional ao inverso da derivada de f



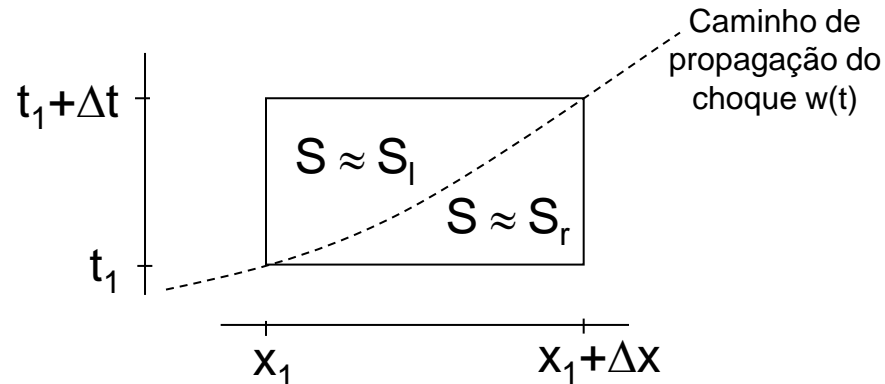
Características no plano xt se cruzam: mais de um valor de saturação no mesmo ponto!!!! Para superar este paradoxo, devemos admitir soluções com descontinuidades de salto, denominadas choques



Condição Inicial $S_0(x)$

Problema de Buckley-Leverett

- Vamos obter a velocidade de propagação $s(t)$ de um choque com valores à esquerda e à direita u_l e u_r
- Argumento baseado em conservação de massa



- Expansão em série de Taylor:

$$w(t_1 + \Delta t) = w(t_1) + w'(t_1)\Delta t + O(\Delta t^2)$$

$$x_1 + \Delta x = x_1 + s(t_1)\Delta t + O(\Delta t^2)$$

$$\Delta x = s(t_1)\Delta t + O(\Delta t^2)$$

Problema de Buckley-Leverett

- Integrando a equação de Buckley-Leverett no retângulo

$$\int_{t_1}^{t_1+\Delta t} \int_{x_1}^{x_1+\Delta x} \left(\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{v}{\phi} \frac{\partial f(S)}{\partial x} \right) dx dt = 0$$

$$\int_{x_1}^{x_1+\Delta x} S(x, t_1 + \Delta t) dx - \int_{x_1}^{x_1+\Delta x} S(x, t_1) dx + \frac{v}{\phi} \int_{t_1}^{t_1+\Delta t} f(S(x_1, t)) dt - \frac{v}{\phi} \int_{t_1}^{t_1+\Delta t} f(S(x_1 + \Delta x, t)) dt$$

$$\Delta x S_l - \Delta x S_r \approx \Delta t \frac{v}{\phi} f(S_l) - \Delta t \frac{v}{\phi} f(S_r)$$

$$s(t_1) \Delta t (S_l - S_r) = \Delta t \frac{v}{\phi} (f(S_l) - f(S_r))$$

$$s(t_1) = \frac{v}{\phi} \frac{f(S_l) - f(S_r)}{S_l - S_r}$$

Condição de Rankine-Hugoniot

Problema de Buckley-Leverett

- Voltando ao problema de Riemann

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{v}{\phi} f'(S) \frac{\partial S}{\partial x} = 0$$

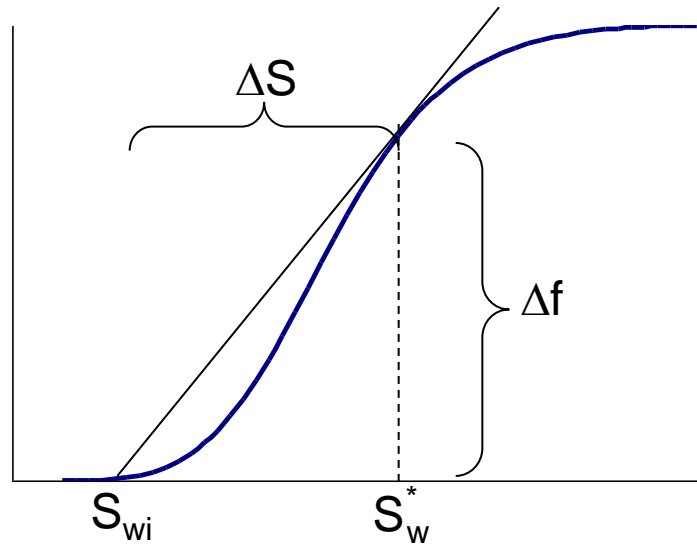
$$S(x,0) = S_{wi}$$

$$S(0,t) = 1 - S_{or}$$

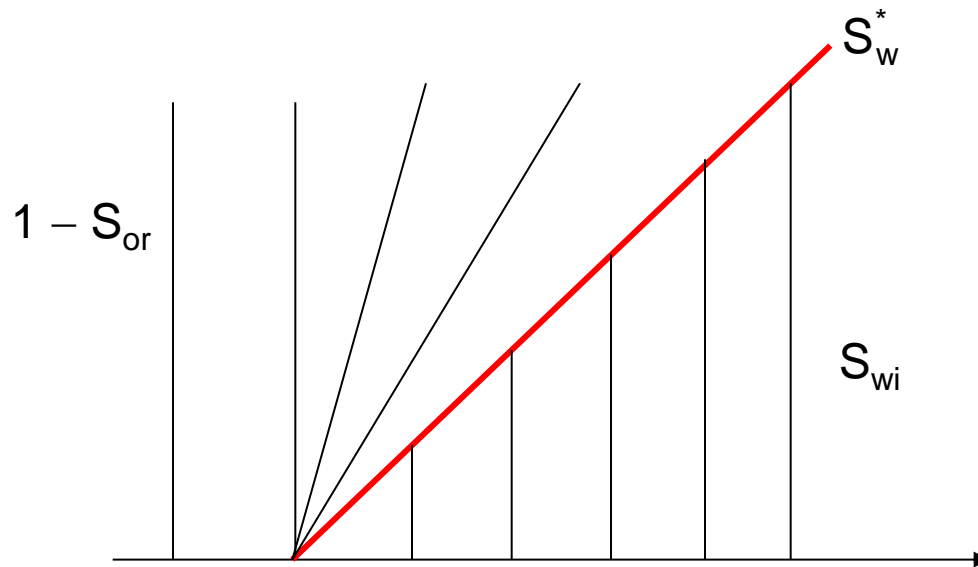
- À direita do choque, a saturação é $S_r = S_{wi}$
- À esquerda do choque, $S_l = S_w^*$ é determinado de forma a compatibilizar a condição de RH com o método das características

$$\frac{v}{\phi} f'(S_w^*) = \frac{f(S_w^*) - f(S_{wi})}{S_w^* - S_{wi}}$$

Problema de Buckley-Leverett

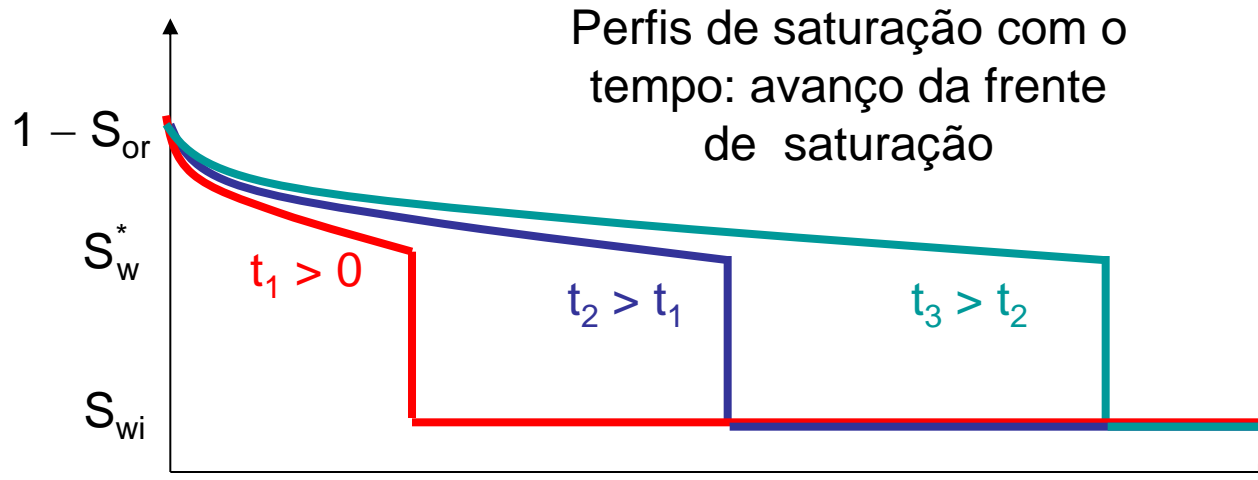


Construção Gráfica
de Welge
Corresponde ao
envelope convexo
do gráfico de f



Características
no plano xt

Problema de Buckley-Leverett



- Velocidade de propagação finita
- Descontinuidades podem aparecer mesmo para dados iniciais suaves

Efeito do Termo Difusivo

- Vamos considerar o seguinte problema de valor inicial para a equação da advecção-difusão linear

$$\frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} - \varepsilon \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = 0, u, \varepsilon > 0 \text{ constante}$$

$$S(x,0) = S_0(x) = \begin{cases} S_1, & x \geq 0 \\ S_2, & x < 0 \end{cases}, S_1 > S_2$$

- Introduzindo novas variáveis $\tau = t$ e $y = x - ut$, $S = S(y(x,t), \tau(t))$, temos que

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = -u \frac{\partial S}{\partial y} + \frac{\partial S}{\partial \tau}$$

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial S}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial x} = \frac{\partial S}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 S}{\partial y^2}$$

Efeito do Termo Difusivo

- Substituindo na equação

$$-u \frac{\partial S}{\partial y} + \frac{\partial S}{\partial \tau} + u \frac{\partial S}{\partial y} - \varepsilon \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial S}{\partial \tau} - \varepsilon \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} = 0$$

- A solução é dada por

$$S(y, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} S_0(\xi) e^{-(y-\xi)^2/(4\varepsilon\tau)} d\xi$$

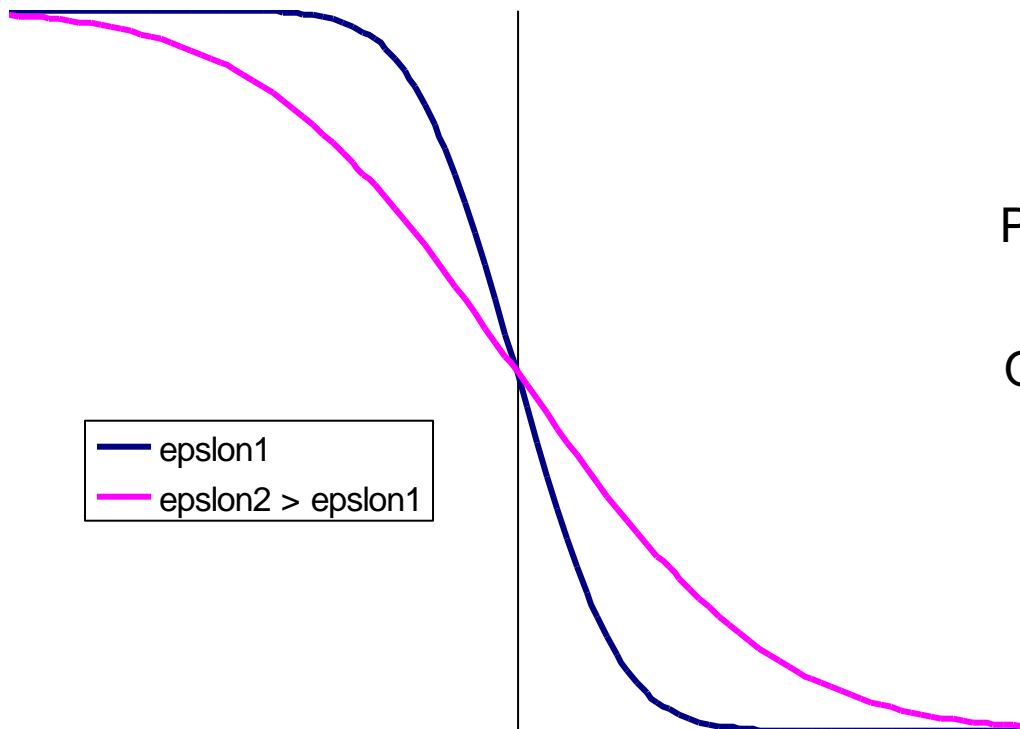
- Substituindo $\alpha = (y - \xi)/(2\sqrt{\varepsilon\tau})$ a solução pode ser expressa como

$$S(y, \tau) = \frac{S_1 + S_2}{2} + \frac{S_1 - S_2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{y/(2\sqrt{\varepsilon\tau})} e^{-\alpha^2} d\alpha$$

Efeito do Termo Difusivo

- Definindo $\text{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\alpha^2} d\alpha = \text{função erro}$

$$S(y, \tau) = \frac{S_1 + S_2}{2} + \frac{S_1 - S_2}{2} \text{erf}\left(\frac{y}{2\sqrt{\varepsilon\tau}}\right)$$



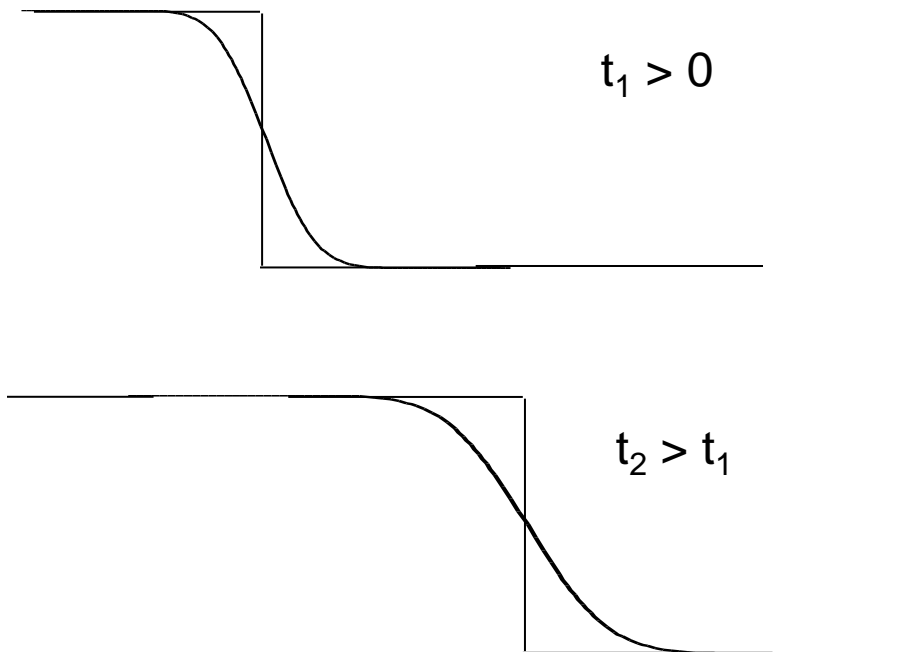
Perfis de solução para o mesmo τ
e dois valores de ε

Quanto maior ε , mais “suavizada”
a solução

Efeito do Termo Difusivo

- Nas coordenadas originais, a solução se move para a direita

$$S(x,t) = \frac{S_1 + S_2}{2} + \frac{S_1 - S_2}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{x - ut}{2\sqrt{\varepsilon t}}\right)$$



- O efeito do termo difusivo é suavizar a frente de avanço em relação à solução da advecção pura
- Quanto maior ε , maior a suavização
- Em modelagem de produção de petróleo, usualmente a difusividade introduzida pelas forças capilares é pequena e frentes abruptas de saturação se formam

UNIVERSIDADE

Introdução à Simulação de Reservatórios Petrolíferos

Prof. José Roberto P. Rodrigues
(PETROBRAS/CENPES)

Programa de Verão LNCC – Fevereiro de 2015

Escoamento Bifásico – Formulação Numérica

- Comportamento qualitativo das variáveis no escoamento bifásico:
 - ✓ Pressão é governada por uma equação parabólica (para pequenas compressibilidades quase elíptica)
 - ✓ Saturação é governada por uma equação de advecção-difusão, com termo difusivo de pequena magnitude

Escoamento Bifásico – Formulação Numérica

- Discretizações apropriadas para problemas elípticos e parabólicos já foram discutidas no escoamento monofásico
- Trataremos agora de dois assuntos:
 - ✓ Métodos numéricos apropriados para problemas de advecção (hiperbólicos)
 - ✓ Como combinar os métodos numéricos discutidos em problemas modelo para gerar procedimentos efetivos para solução de problemas de escoamento bifásicos multidimensionais

Escoamento Bifásico – Formulação Numérica

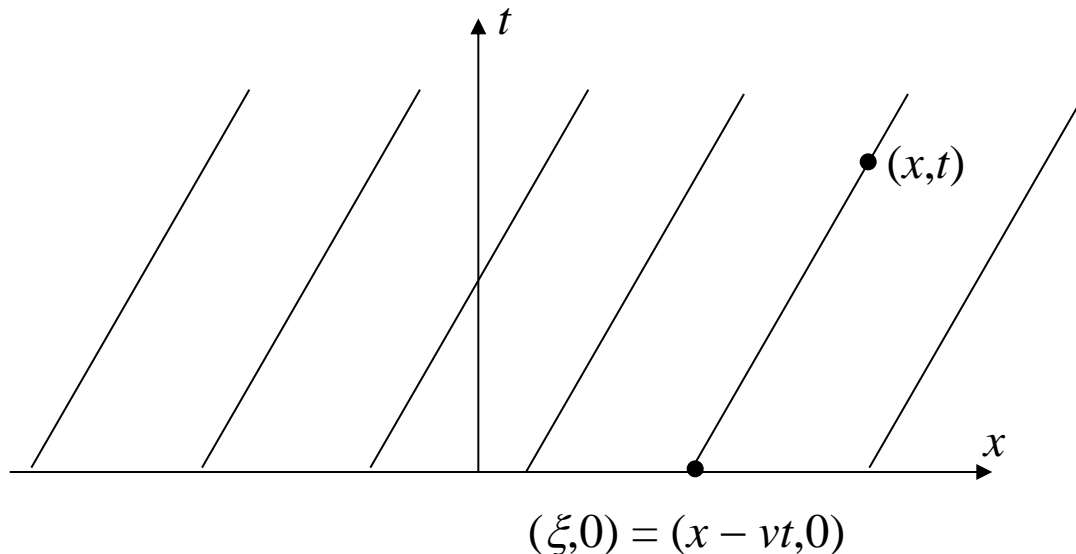
- Tópicos
 - Discretização para problemas de advecção
 - Tratamento explícito e implícito. Estabilidade e condição de CFL
 - Discretização a montante e dispersão numérica
 - Métodos para escoamento bifásico
 - Métodos IMPES e totalmente implícito (FIM)

Equação de Advecção Linear 1D

- Problema de Cauchy para a equação de advecção linear em 1D

$$S_t + vS_x = 0, \quad v > 0$$

$$S(x, 0) = S_0(x)$$



Características
no plano xt

- Aplicando o formalismo do MVF em uma malha de células $[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$ e pontos x_j e tratamento explícito do termo advectivo

$$\int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} S_t|_{(x,t^n)} dx + \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} v S_x|_{(x,t^n)} dx = 0$$

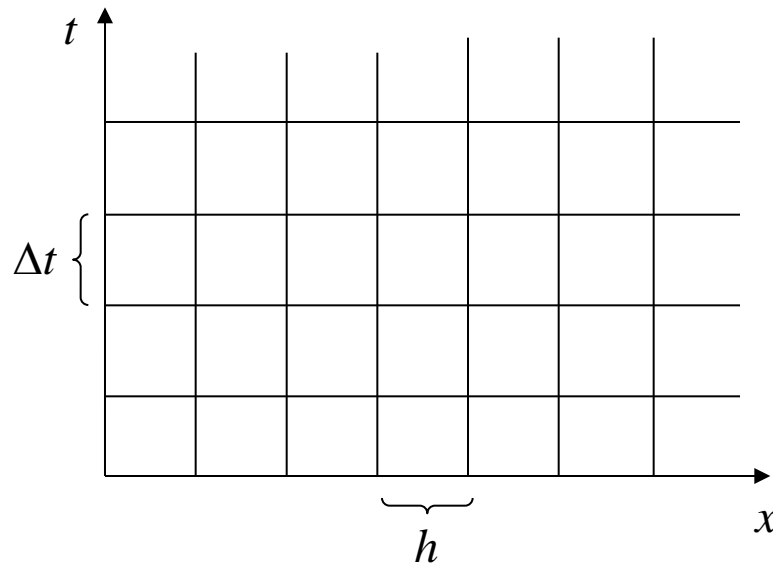
$$h_{j+1/2} \frac{S_j^{n+1} - S_j^n}{\Delta t} + v \left(S_{j+1/2}^n - S_{j-1/2}^n \right) = 0$$

$$\frac{S_j^{n+1} - S_j^n}{\Delta t^n} + v \frac{S_{j+1/2}^n - S_{j-1/2}^n}{h_{j+1/2}} = 0$$

- Discretização temporal: $S_t \approx \frac{S_j^{n+1} - S_j^n}{\Delta t^n}$

Equação de Advecção Linear 1D

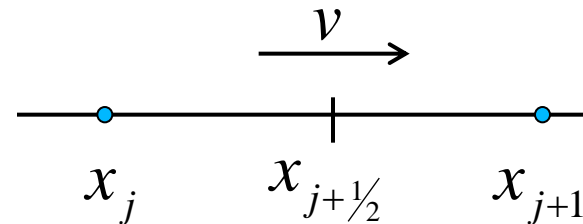
- Para discutir a avaliação de S na face da célula e a discretização da derivada espacial, consideraremos malha uniforme: $\Delta t =$ intervalo de tempo, $h =$ largura da malha espacial



Equação de Advecção Linear 1D

- Avaliação centrada de S na face $x_{j+1/2}$

$$S_{j+1/2} \approx \frac{S_{j+1}^n + S_j^n}{2}$$



- Resulta na discretização

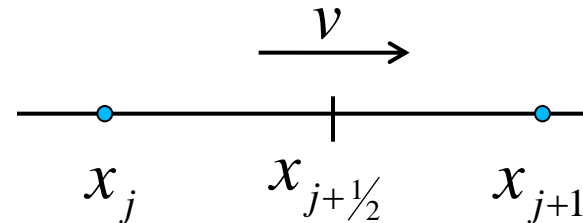
$$\frac{S_j^{n+1} - S_j^n}{\Delta t} + v \frac{S_{j+1}^n - S_{j-1}^n}{2h} = 0$$

$$S_x \approx \frac{S_{j+1}^n - S_{j-1}^n}{2h} \quad \text{Diferença central}$$

Equação de Advecção Linear 1D

- Avaliação a montante (“upstream”) de S na face $x_{j+1/2}$

$$S_{j+1/2} \approx S_j$$



- Resulta na discretização

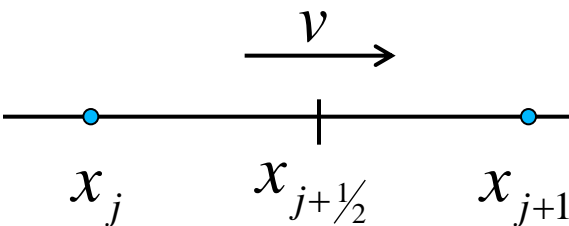
$$\frac{S_j^{n+1} - S_j^n}{\Delta t} + v \frac{S_j^n - S_{j-1}^n}{h} = 0$$

$$S_x \approx \frac{S_j^n - S_{j-1}^n}{h}$$

Diferença para trás

Equação de Advecção Linear 1D

- Avaliação a jusante (“downstream”) de S na face $x_{j+1/2}$

$$S_{j+1/2} \approx S_{j+1}$$


The diagram shows a horizontal line representing a 1D grid. Three points are marked on the line with blue dots and labeled below as x_j , $x_{j+1/2}$, and x_{j+1} . A vertical tick mark is at $x_{j+1/2}$. Above the line, a horizontal arrow points to the right, labeled with the variable v .

- Resulta na discretização

$$\frac{S_j^{n+1} - S_j^n}{\Delta t} + v \frac{S_{j+1}^n - S_j^n}{h} = 0$$

$$S_x \approx \frac{S_{j+1}^n - S_j^n}{h} \quad \text{Diferença para frente}$$

Equação de Advecção Linear 1D

- Análise do erro de truncamento por série de Taylor

$$S_{j+1}^n = S_j^n + h \left. \frac{\partial S}{\partial x} \right|_{x=x_j} + \frac{h^2}{2} \left. \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \right|_{x=x'} \Rightarrow \left. \frac{\partial S}{\partial x} \right|_{x=x_j} = \frac{S_{j+1}^n - S_j^n}{h} + \frac{h}{2} \left. \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \right|_{x=x'} \Rightarrow |E_{DF}^T| = O(h)$$

$$S_{j-1}^n = S_j^n - h \left. \frac{\partial S}{\partial x} \right|_{x=x_j} + \frac{h^2}{2} \left. \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \right|_{x=x''} \Rightarrow \left. \frac{\partial S}{\partial x} \right|_{x=x_j} = \frac{S_j^n - S_{j-1}^n}{h} - \frac{h}{2} \left. \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \right|_{x=x''} \Rightarrow |E_{DT}^T| = O(h)$$

Equação de Advecção Linear 1D

- Análise do erro de truncamento por série de Taylor

$$\left. \begin{aligned} S_{j+1}^n &= S_j^n + h \left. \frac{\partial S}{\partial x} \right|_{x=x_j} + \frac{h^2}{2} \left. \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \right|_{x=x_j} + \frac{h^3}{6} \left. \frac{\partial^3 S}{\partial x^3} \right|_{x=x'} \\ S_{j-1}^n &= S_j^n - h \left. \frac{\partial S}{\partial x} \right|_{x=x_j} + \frac{h^2}{2} \left. \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \right|_{x=x_j} - \frac{h^3}{6} \left. \frac{\partial^3 S}{\partial x^3} \right|_{x=x''} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \frac{\partial S}{\partial x} \right|_{x=x_j} = \frac{S_{j+1}^n - S_{j-1}^n}{2h} + O(h^2)$$

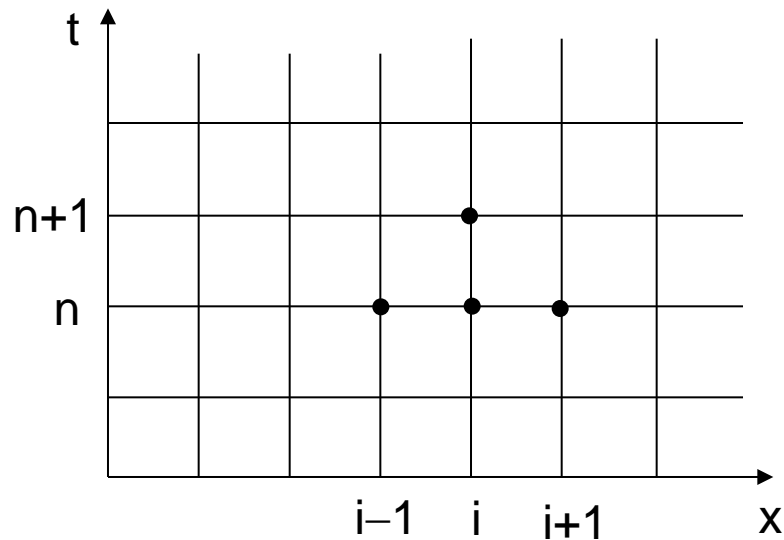
$$\left| E_{DC}^T \right| = O(h^2)$$

Equação de Advecção Linear 1D

- Com base no erro de truncamento, escolheríamos o esquema

$$\frac{S_j^{n+1} - S_j^n}{\Delta t} + v \frac{S_{j+1}^n - S_{j-1}^n}{2h} = 0 \Rightarrow S_j^{n+1} = S_j^n - \frac{c}{2} S_{j+1}^n + \frac{c}{2} S_{j-1}^n, \quad c = \frac{v\Delta t}{h}$$

$$S_j^0 = S_0(x_j)$$



- Para mostrar que esta não é uma boa escolha, vamos utilizar análise harmônica
- Assuma que a solução possa ser expressa como uma soma de componentes trigonométricas

$$S_j^n = \sum_k \gamma_k^n e^{ik(jh)}, \quad i = \sqrt{-1}$$

- Substituindo na expressão para o esquema e analisando separadamente cada componente

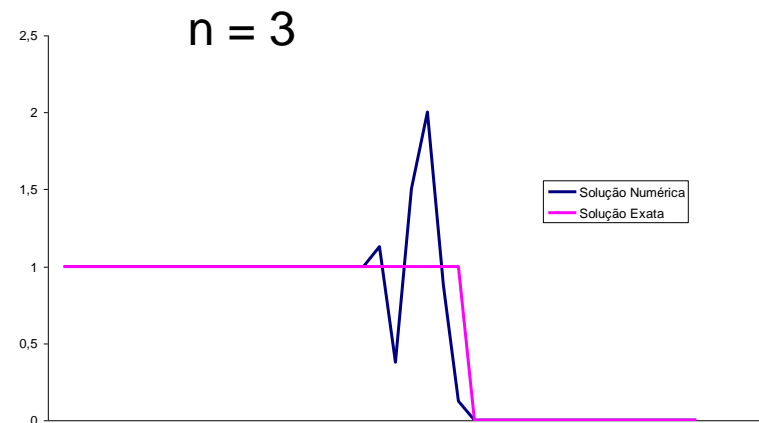
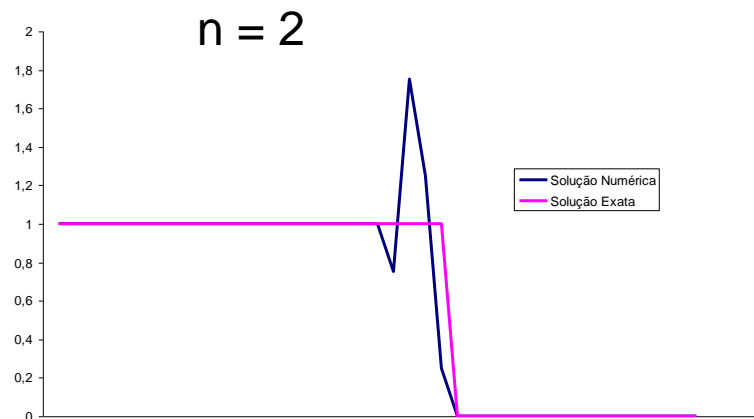
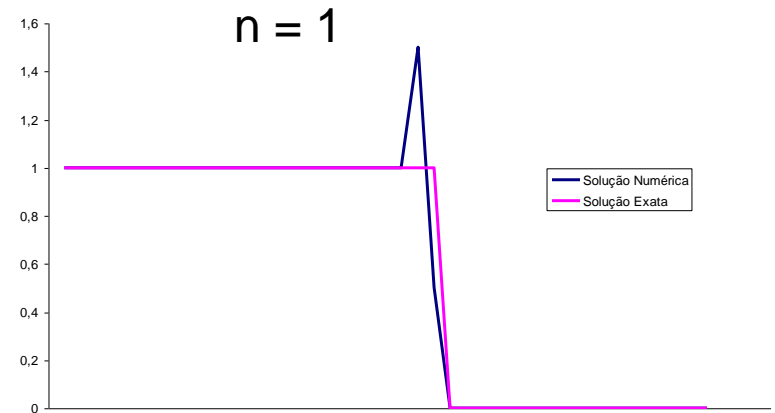
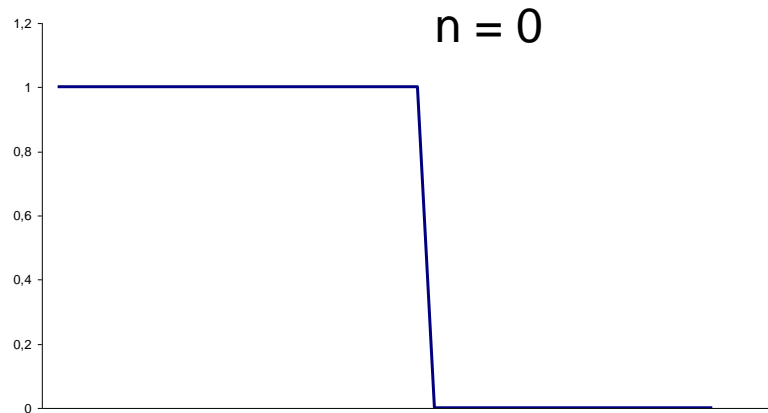
$$\gamma_k^{n+1} e^{ik(jh)} = \gamma_k^n e^{ik(jh)} - \frac{c}{2} \gamma_k^n e^{ik((j+1)h)} + \frac{c}{2} \gamma_k^n e^{ik((j-1)h)}$$

- Cancelando o termo comum $e^{ik(jh)}$

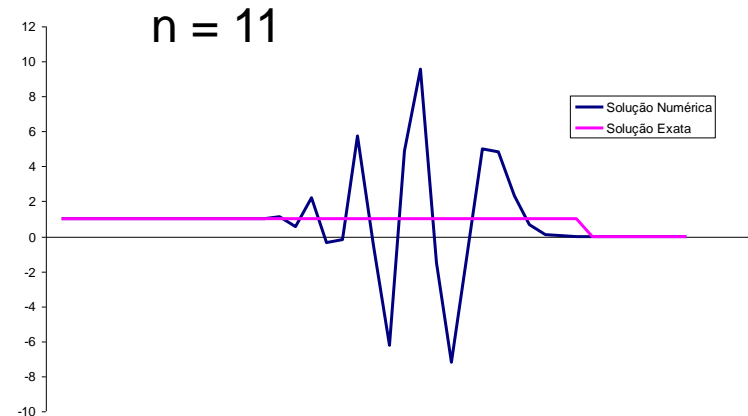
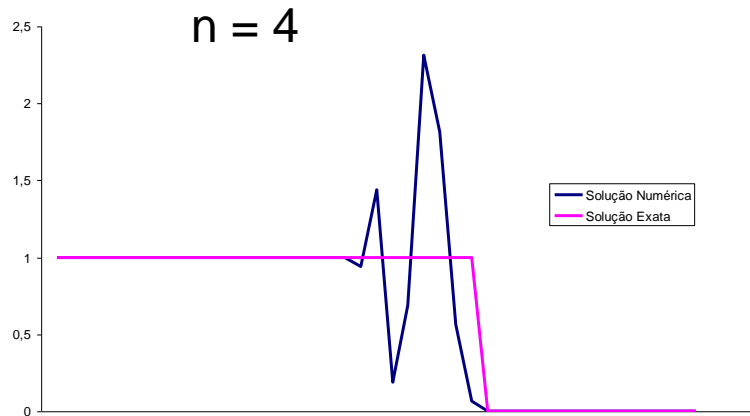
$$\frac{\gamma_k^{n+1}}{\gamma_k^n} = 1 - \frac{c}{2} e^{ikh} + \frac{c}{2} e^{-ikh} = 1 - ci \sin(kh) \Rightarrow \frac{|\gamma_k^{n+1}|}{|\gamma_k^n|} = 1 + c^2 \sin^2(kh) \geq 1$$

- Exceto para kh múltiplo de π , os fatores de amplificação da solução crescem em módulo de um passo de tempo para outro
- O esquema é instável: gera soluções que podem oscilar e crescer com o tempo

- Resultados para dado inicial função degrau (corresponderia a uma injeção contínua de água) com $\nu = 1$



Equação de Advecção Linear 1D



- Após onze passos de tempo a solução é completamente inútil!!!

Equação de Advecção Linear 1D

- Para discutir os esquemas de diferença para frente e para trás no espaço, vamos examinar como a informação se propaga nestes esquemas
- Esquema para frente

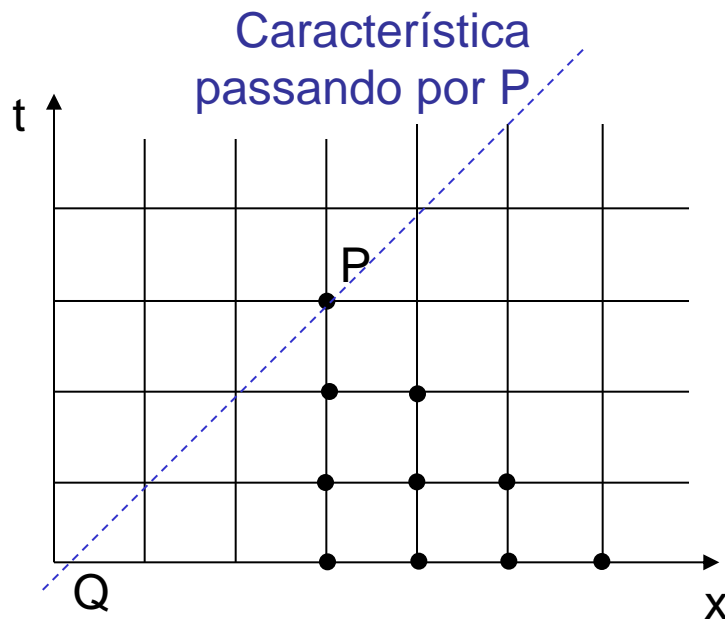
$$\frac{S_j^{n+1} - S_j^n}{\Delta t} + v \frac{S_{j+1}^n - S_j^n}{h} = 0$$

⇓

$$S_j^{n+1} = (1 + c) S_j^n - c S_{j+1}^n, \quad c = \frac{v \Delta t}{h}$$

Equação de Advecção Linear 1D

- Domínio de dependência numérico do ponto P: conjunto dos pontos do plano (x,t) que influenciam a solução numérica em P



A solução em P depende do valor do dado inicial em Q, mas alterando o dado inicial em Q a solução numérica não se altera, logo o esquema não pode convergir para a solução

Condição necessária para convergência: a característica deve estar contida no domínio de dependência numérico

Equação de Advecção Linear 1D

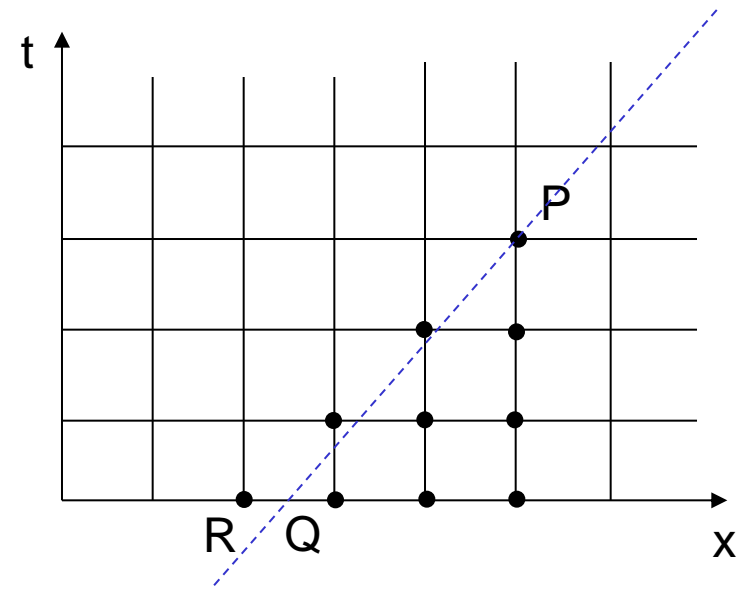
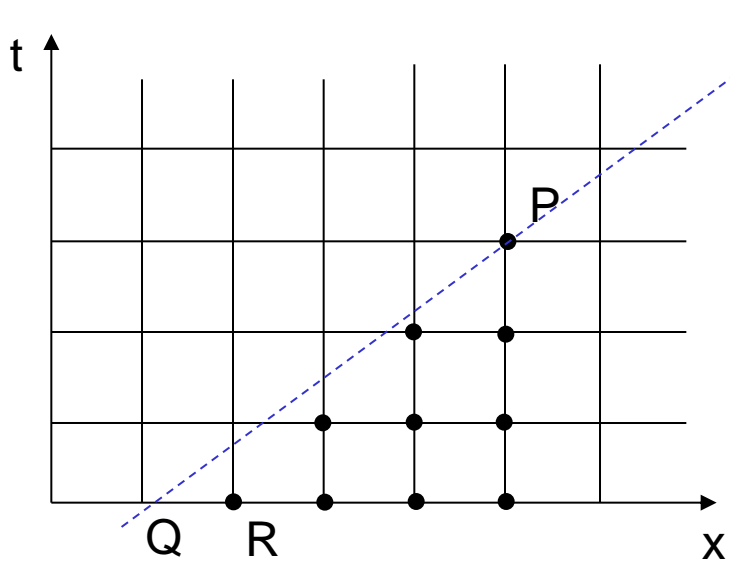
- Esquema para trás

$$\frac{S_j^{n+1} - S_j^n}{\Delta t} + v \frac{S_j^n - S_{j-1}^n}{h} = 0$$

⇓

$$S_j^{n+1} = (1 - c) S_j^n + c S_{j-1}^n, \quad c = \frac{v \Delta t}{h}$$

Equação de Advecção Linear 1D



- Se $P = (x_i, t^n)$, $Q = (x_i - vt^n, 0) = (x_i - vn\Delta t, 0)$ e $R = (x_i - nh, 0)$. Daí,

$$vn\Delta t \leq nh \Rightarrow c = \frac{v\Delta t}{h} \leq 1 \quad \text{Condição de CFL}$$

Equação de Advecção Linear 1D

- Note que a condição de CFL garante um princípio de máximo, já que, para $1 - c \geq 0$,

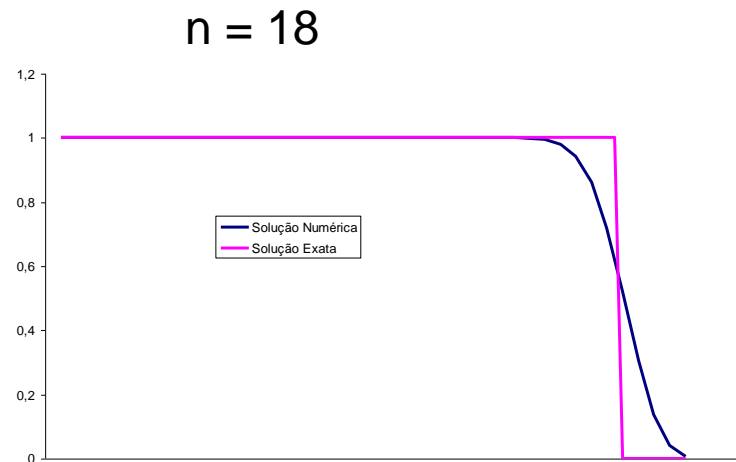
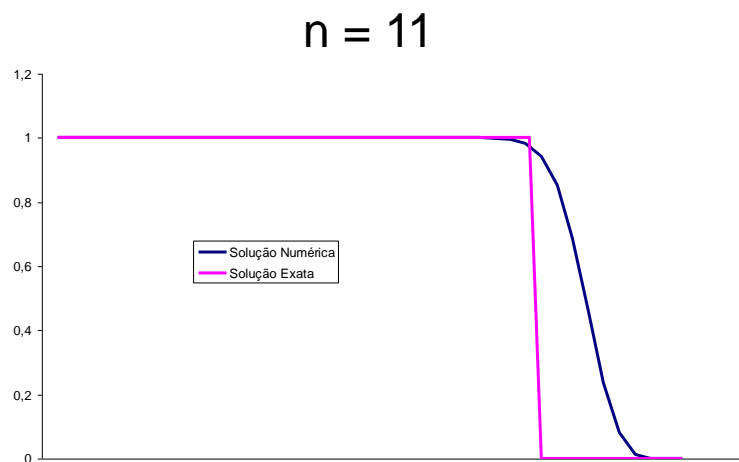
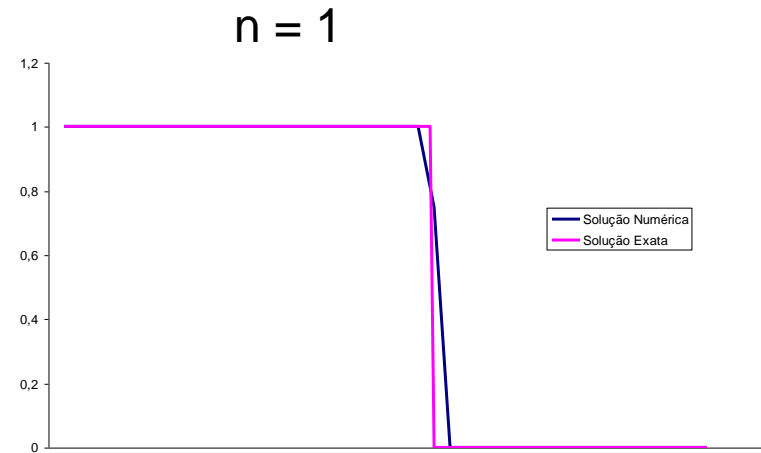
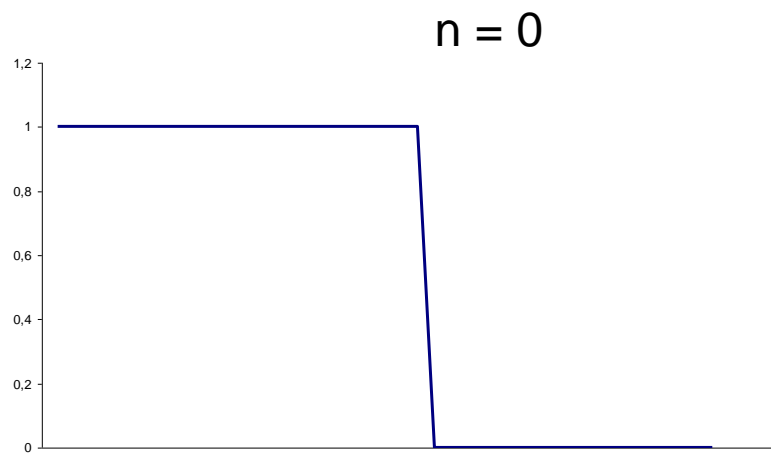
$$S_j^{n+1} = (1 - c)S_j^n + cS_{j-1}^n \leq \max \{S_j^n, S_{j-1}^n\} \leq \max_\ell \{S_\ell^n\}$$

Equação de Advecção Linear 1D

- A condição de CFL tem uma interpretação física: o volume de fluido que entra na célula em um passo de tempo não pode exceder o seu volume (“throughput condition”)
- De fato, sendo A a área da seção transversal:

$$c = \frac{v\Delta t}{h} \leq 1 \Rightarrow vA\Delta t \leq Ah \Rightarrow Q\Delta t \leq V$$

Resultados para dado inicial função degrau (corresponderia a uma injeção contínua de água) com $\nu = 0,75$



Equação de Advecção Linear 1D

- A solução numérica é sempre monótona, mas apresenta uma grande suavização da frente de avanço
- Análise do erro de truncamento espacial

$$v \frac{S_j^n - S_{j-1}^n}{h} = v \frac{S_{j+1}^n - S_{j-1}^n}{2h} - \frac{vh}{2} \frac{S_{j+1}^n - 2S_j^n + S_{j-1}^n}{h^2} = v \left. \frac{\partial S}{\partial x} \right|_{x=x_j} - \frac{vh}{2} \left. \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \right|_{x=x_j} + O(h^2)$$

- Análise do erro de truncamento temporal

$$S_j^{n+1} = S_j^n + \Delta t \left. \frac{\partial S}{\partial t} \right|_{t=t^n} + \frac{(\Delta t)^2}{2} \left. \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} \right|_{t=t^n} + O(\Delta t)^3 \Rightarrow \frac{S_j^{n+1} - S_j^n}{\Delta t} = \left. \frac{\partial S}{\partial t} \right|_{t=t^n} + \frac{\Delta t}{2} \left. \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} \right|_{t=t^n} + O(\Delta t)^2$$

Equação de Advecção Linear 1D

- Vamos expressar a derivada segunda em t em função da derivada segunda em x

$$\frac{\partial S}{\partial t} + v \frac{\partial S}{\partial x} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} + v \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial x} = 0 \\ \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial t} + v \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = 0$$

⇓

$$\frac{S_j^{n+1} - S_j^n}{\Delta t} = \left. \frac{\partial S}{\partial t} \right|_{t=t^n} + \frac{\Delta t}{2} v^2 \left. \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \right|_{x=x_i} + O(\Delta t)^2$$

Equação de Advecção Linear 1D

- Juntando o erro de truncamento temporal e espacial

$$\frac{S_j^{n+1} - S_j^n}{\Delta t} + v \frac{S_j^n - S_{j-1}^n}{h} = \left. \frac{\partial S}{\partial t} \right|_{t=t^n} + v \left. \frac{\partial S}{\partial x} \right|_{x=x_i} - \frac{vh}{2} \left(1 - \frac{v\Delta t}{h} \right) \left. \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \right|_{x=x_i} + O(\Delta t)^2 + O(h^2)$$

- O esquema explícito de diferenças para trás funciona como uma boa aproximação para a equação

$$\frac{\partial S}{\partial t} + v \frac{\partial S}{\partial x} - \underbrace{D_{num} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}}_{\text{Termo de difusão numérica}} = 0, \quad D_{num} = \frac{vh}{2}(1-c)$$

Equação de Advecção Linear 1D

- A difusão numérica é mais severa quanto maior a velocidade de fluxo
- A difusão numérica diminui quando se refina a malha espacial (mantendo Δt constante). Note que c está limitado pela condição de estabilidade $c \leq 1$
- A difusão numérica diminui quando se aumenta o passo de tempo (mantendo h constante), já que o termo difusivo é multiplicado por $1 - c$ (note que c está limitado pela condição de estabilidade $c \leq 1$)

Equação de Advecção Linear 1D

- Em particular, quando $c = 1$ a difusão numérica se anula e o esquema se torna de segunda ordem no tempo e no espaço
- De fato, para $c = 1$, a informação se propaga exatamente ao longo da característica e a solução exata é obtida
- Em problemas reais, esta condição não pode ser conseguida na prática, por causa de não-linearidades, malha não uniforme, velocidade variável no espaço, etc

Equação de Advecção Linear 1D

- Em muitos casos (altas velocidades, malha fina, etc), a condição de CFL pode levar a passos de tempo excessivamente restritos
- Esquemas implícitos são uma alternativa:

$$\frac{S_j^{n+1} - S_j^n}{\Delta t} + v \frac{S_j^{n+1} - S_{j-1}^{n+1}}{h} = 0$$

⇓

$$(1 + c)u_j^{n+1} - cu_{j-1}^n = u_j^n$$

Equação de Advecção Linear 1D

- Vamos analisar a estabilidade através do princípio de máximo

$$S_J^{n+1} = \max_{\ell} \{S_{\ell}^{n+1}\} \Rightarrow S_J^{n+1} + c \underbrace{(S_J^{n+1} - S_{J-1}^{n+1})}_{\geq 0} = S_J^n \Rightarrow$$

$$S_J^{n+1} \leq S_J^n \leq \max_{\ell} \{S_{\ell}^n\}$$

Vale um princípio de máximo para qualquer valor de v

Estabilidade Incondicional

Equação de Advecção Linear 1D

- A análise do erro de truncamento temporal se altera ligeiramente:

$$S_j^n = S_j^{n+1} - \Delta t \left. \frac{\partial S}{\partial t} \right|_{t=t^{n+1}} + \frac{(\Delta t)^2}{2} \left. \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} \right|_{t=t^{n+1}} + O(\Delta t)^3 \Rightarrow$$

$$\frac{S_j^{n+1} - S_j^n}{\Delta t} = \left. \frac{\partial S}{\partial t} \right|_{t=t^{n+1}} - \frac{\Delta t}{2} \left. \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} \right|_{t=t^{n+1}} + O(\Delta t)^2$$

⇓

$$\frac{S_j^{n+1} - S_j^n}{\Delta t} = \left. \frac{\partial S}{\partial t} \right|_{t=t^{n+1}} - \frac{\Delta t}{2} v^2 \left. \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \right|_{x=x_i} + O(\Delta t)^2$$

Equação de Advecção Linear 1D

- Juntando o erro de truncamento temporal e espacial

$$\begin{aligned} & \frac{S_j^{n+1} - S_j^n}{\Delta t} + v \frac{S_j^{n+1} - S_{j-1}^{n+1}}{h} = \\ & = \frac{\partial S}{\partial t} \Big|_{t=t^{n+1}} + v \frac{\partial S}{\partial x} \Big|_{x=x_i} - \frac{vh}{2} \left(1 + \frac{v\Delta t}{h} \right) \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \Big|_{x=x_i} + O(\Delta t)^2 + O(h^2) \end{aligned}$$

- O esquema implícito de diferenças para trás funciona como uma boa aproximação para a equação

$$\frac{\partial S}{\partial t} + v \frac{\partial S}{\partial x} - D_{num} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = 0, \quad D_{num} = \frac{vh}{2} (1 + c)$$

Equação de Advecção Linear 1D

- Para o método implícito não há restrição no tamanho do passo de tempo para estabilidade
- A difusão numérica é maior para o método implícito que para o explícito
- A difusão numérica para o método implícito aumenta quando se aumenta o passo de tempo (mantendo h constante), já que o termo difusivo é multiplicado por $1 + c$

Equação de Advecção Não-Linear 1D

- Vamos estender a discussão para o problema da equação de Buckley-Leverett

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{v}{\phi} \frac{\partial f(S)}{\partial x} = 0$$

$$S(x, 0) = S_0(x)$$

Equação de Advecção Não-Linear 1D

- Esquema explícito para trás

$$\frac{S_j^{n+1} - S_j^n}{\Delta t} + \frac{v}{\phi} \frac{f(S_j^n) - f(S_{j-1}^n)}{h} = 0$$

⇓

$$S_j^{n+1} = S_j^n - \frac{v\Delta t}{\phi h} \left(f(S_j^n) - f(S_{j-1}^n) \right)$$

$$S_j^0 = S_0(x_j)$$

- A análise de estabilidade pode ser estendida para este caso, observando que

$$S_j^{n+1} = S_j^n - \frac{v\Delta t}{\phi h} f'(\bar{S}_j^n) (S_j^n - S_{j-1}^n) = (1 - c_j^n) S_j^n + c_j^n S_{j-1}^n,$$

$$c_j^n = \frac{v\Delta t}{\phi h} f'(\bar{S}_j^n), \quad \bar{S}_j^n \in [S_j^n, S_{j-1}^n]$$

$c_j^n \leq 1$ garante princípio de máximo (estabilidade)

Esta condição não pode ser utilizada na prática já que \bar{S}_j^n não é conhecido

$$\text{Definindo } \bar{c}_j^n = \frac{v\Delta t}{\phi h} \sup_{S \in [S_j^n, S_{j-1}^n]} f'(S) \Rightarrow c_j^n \leq \bar{c}_j^n$$

A condição $\bar{c}_j^n \leq 1$ pode ser utilizada e garante o princípio de máximo

Equação de Advecção Não-Linear 1D

- Esquema implícito para trás

$$\frac{S_j^{n+1} - S_j^n}{\Delta t} + \frac{v}{\phi} \frac{f(S_j^{n+1}) - f(S_{j-1}^{n+1})}{h} = 0$$

- Requer a resolução de um sistema de equações algébricas não-lineares
- O método de Newton pode ser empregado

- A estabilidade pode ser analisada de forma semelhante ao caso linear

$$S_j^{n+1} + \frac{v\Delta t}{\phi h} f'(\bar{S}_j^{n+1}) (S_j^{n+1} - S_{j-1}^{n+1}) = S_j^n \Rightarrow S_j^{n+1} + c_j^n (S_j^{n+1} - S_{j-1}^{n+1}) = S_j^n,$$

$$c_j^n = \frac{v\Delta t}{\phi h} f'(\bar{S}_j^{n+1}), \quad \bar{S}_j^{n+1} \in [S_j^{n+1}, S_{j-1}^{n+1}]$$

- Vale o princípio de máximo independente de c_j^n : estabilidade incondicional
- Como o método de Newton tem convergência local, pode acontecer do método não convergir para passos de tempo muito grandes
- Neste caso, o passo de tempo é feito com um incremento menor

Equação de Advecção Não-Linear 1D

- A condição de CFL para estabilidade de esquemas explícitos é uma condição local e, portanto, o passo de tempo é limitado pela célula onde a condição é mais severa
- Em problemas práticos, a condição de CFL pode variar grandemente tanto no espaço como no tempo, em virtude de variações na velocidade do fluido, tamanho das malhas, etc
- Essa observação motivou a introdução de esquemas adaptivos implícitos (AIM)

- Em um esquema AIM, o tratamento implícito é restrito apenas às células em que a condição de CFL exigiria tomar passos de tempo pequenos, todas as demais sendo tratadas explicitamente
- O método AIM busca reduzir o esforço computacional por passo de tempo ao mesmo tempo em que utiliza passos de tempo tão grandes quanto os do método FIM
- As células a serem tratadas implícita ou explicitamente variam no espaço e no tempo ao longo da simulação baseado em um critério de estabilidade que estabeleça ou um passo de tempo desejado ou um percentual máximo de células implícitas dado

Equação de Advecção Não-Linear 1D

- Para apresentar o método vamos considerar um caso em que as $p - 1$ primeiras células são implícitas e as demais explícitas

$$\frac{S_j^{n+1} - S_j^n}{\Delta t} + \frac{v}{\phi} \frac{f(S_j^{n+1}) - f(S_{j-1}^{n+1})}{h} = 0, \quad j = 1, \dots, p - 1$$

$$\frac{S_p^{n+1} - S_p^n}{\Delta t} + \frac{v}{\phi} \frac{f(S_p^n) - f(S_{p-1}^{n+1})}{h} = 0$$

$$\frac{S_j^{n+1} - S_j^n}{\Delta t} + \frac{v}{\phi} \frac{f(S_j^n) - f(S_{j-1}^n)}{h} = 0, \quad j = p + 1, \dots, N$$

Equação de Advecção Não-Linear 1D

- Para este problema, é necessário resolver um sistema algébrico não-linear para obter o valor de S nas $p - 1$ primeiras células, enquanto as demais são resolvidas explicitamente
- É possível mostrar que esse esquema satisfaz um princípio de máximo se a condição de CFL é atendida em todas as células explícitas
- No entanto, devido à existência de células de fronteira onde o fluxo de entrada e saída são calculados em tempos distintos aparece um termo $O(\Delta t/h)$ no erro de truncamento

Equação de Advecção Não-Linear 1D

- Além disso, oscilações podem aparecer quando a fronteira IE coincide com choques ou regiões de grande variação na solução
- Do ponto-de-vista prático, esses problemas não são relevantes desde que as fronteiras IE estejam afastadas dessas regiões de maior atividade e o método tem sido empregado com sucesso
- Para uma discussão teórica ver
 - Loubens, Riaz & Tchelepi, Error analysis of an adaptive implicit scheme for hyperbolic conservation laws, *SIAM J. Sci. Comput.*, 2009

Equação de Advecção Não-Linear 2D

- Vamos estender a discussão para o problema da equação de Buckley-Leverett bidimensional

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}f(S)) = 0$$

$$S(x, y, 0) = S_0(x, y)$$

- Vamos assumir que \mathbf{v} é um campo de velocidades incompressível $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$

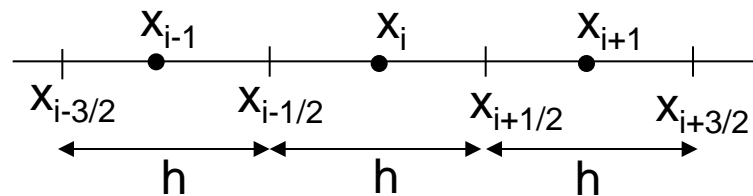
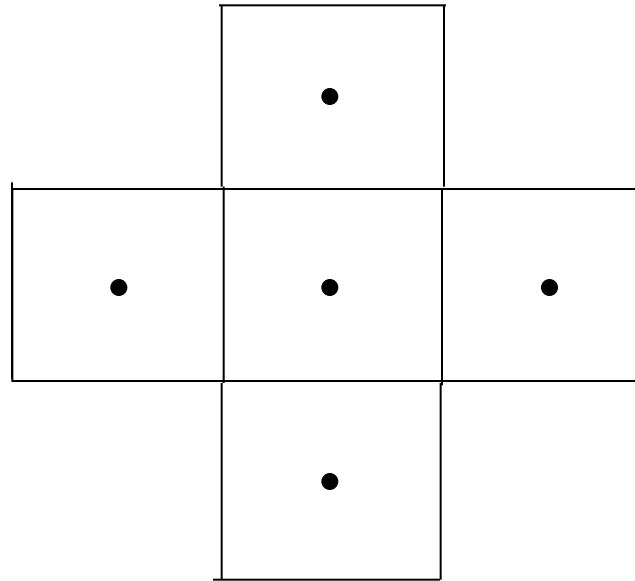
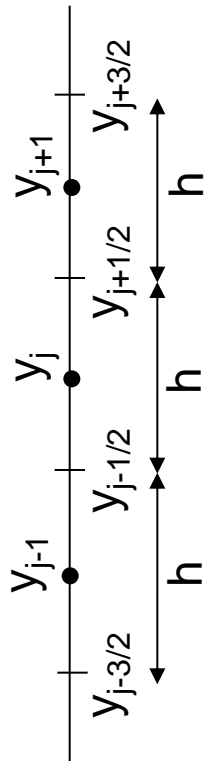
Equação de Advecção Não-Linear 2D

- Note que se $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$, então

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (v_x f(S)) + \frac{\partial}{\partial y} (v_y f(S)) = 0$$

- Considere a célula centrada em (x_i, y_j) e malha uniforme



- Integrando a equação da velocidade

$$\int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \frac{\partial v_x}{\partial x} dx dy + \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \frac{\partial v_y}{\partial y} dy dx = 0$$

⇓

$$\int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \left(v_x(x_{i+\frac{1}{2}}, y) - v_x(x_{i-\frac{1}{2}}, y) \right) dy + \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \left(v_y(x, y_{j+\frac{1}{2}}) - v_y(x, y_{j-\frac{1}{2}}) \right) dx = 0$$

- Aproximando as integrais pelo ponto médio

$$h \left(v_{x_{i+\frac{1}{2},j}} - v_{x_{i-\frac{1}{2},j}} \right) + h \left(v_{y_{i,j+\frac{1}{2}}} - v_{y_{i,j-\frac{1}{2}}} \right) = 0$$

⇓

$$v_{x_{i+\frac{1}{2},j}} - v_{x_{i-\frac{1}{2},j}} + v_{y_{i,j+\frac{1}{2}}} - v_{y_{i,j-\frac{1}{2}}} = 0$$

Equação de Advecção Não-Linear 2D

- Analogamente, integrando a equação de Buckley-Leverett e adotando tratamento explícito

$$h^2 \frac{S_{ij}^{n+1} - S_{ij}^n}{\Delta t} +$$

$$h \left(v_{x_{i+\frac{1}{2},j}} f(S_{i+\frac{1}{2},j}^n) - v_{x_{i-\frac{1}{2},j}} f(S_{i-\frac{1}{2},j}^n) \right) + h \left(v_{y_{i,j+\frac{1}{2}}} f(S_{i,j+\frac{1}{2}}^n) - v_{y_{i,j-\frac{1}{2}}} f(S_{i,j-\frac{1}{2}}^n) \right) = 0$$

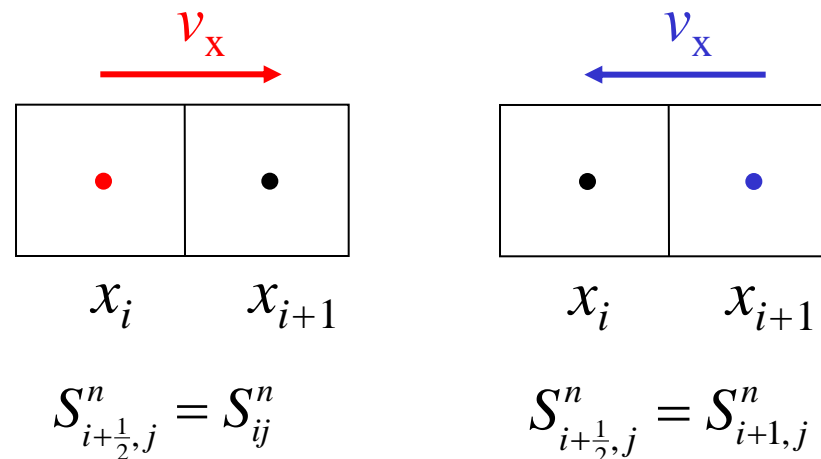
⇓

$$S_{ij}^{n+1} = S_{ij}^n - \frac{\Delta t}{h} \left(v_{x_{i+\frac{1}{2},j}} f(S_{i+\frac{1}{2},j}^n) - v_{x_{i-\frac{1}{2},j}} f(S_{i-\frac{1}{2},j}^n) + v_{y_{i,j+\frac{1}{2}}} f(S_{i,j+\frac{1}{2}}^n) - v_{y_{i,j-\frac{1}{2}}} f(S_{i,j-\frac{1}{2}}^n) \right)$$

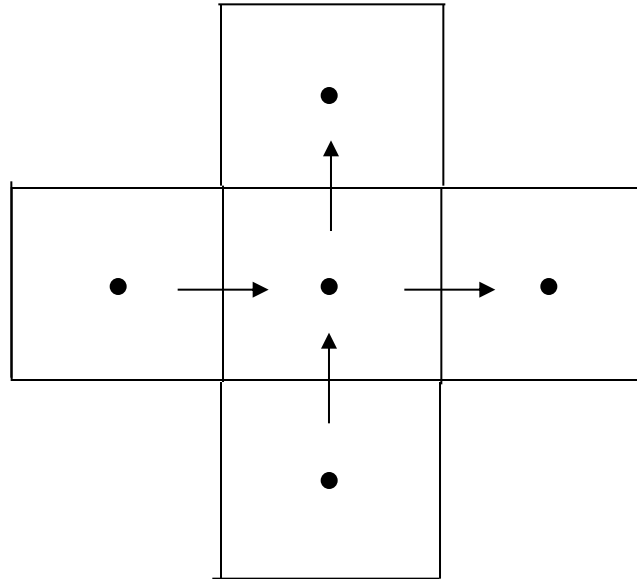
Equação de Advecção Não-Linear 2D

- Avaliação à montante da saturação na interface

$$S_{i+\frac{1}{2},j}^n = \begin{cases} S_{ij}^n, & \text{se } v_{x_{i+\frac{1}{2},j}} \geq 0 \\ S_{i+1,j}^n, & \text{se } v_{x_{i+\frac{1}{2},j}} < 0 \end{cases}$$



- Para analisar a estabilidade, vamos assumir um padrão para as velocidades nas interfaces



$$S_{ij}^{n+1} = S_{ij}^n - \frac{\Delta t}{h} \left(v_{x_{i+\frac{1}{2},j}} f(S_{ij}^n) - v_{x_{i-\frac{1}{2},j}} f(S_{i-1,j}^n) + v_{y_{i,j+\frac{1}{2}}} f(S_{ij}^n) - v_{y_{i,j-\frac{1}{2}}} f(S_{i,j-1}^n) \right)$$

$$S_{ij}^{n+1} = S_{ij}^n - \frac{\Delta t}{h} \left(v_{x_{i+\frac{1}{2},j}} f(S_{ij}^n) - v_{x_{i-\frac{1}{2},j}} f(S_{i-1,j}^n) + v_{y_{i,j+\frac{1}{2}}} f(S_{ij}^n) - v_{y_{i,j-\frac{1}{2}}} f(S_{i,j-1}^n) \right)$$

⇓

$$S_{ij}^{n+1} = S_{ij}^n - \frac{\Delta t}{h} \left(v_{x_{i+\frac{1}{2},j}} f(S_{ij}^n) + v_{y_{i,j+\frac{1}{2}}} f(S_{ij}^n) \right) +$$

$$\frac{\Delta t}{h} \left(v_{x_{i-\frac{1}{2},j}} f(S_{i-1,j}^n) + v_{y_{i,j-\frac{1}{2}}} f(S_{i,j-1}^n) \right)$$

⇓

$$S_{ij}^{n+1} = S_{ij}^n - \frac{\Delta t}{h} f(S_{ij}^n) \left(v_{x_{i+\frac{1}{2},j}} + v_{y_{i,j+\frac{1}{2}}} - v_{x_{i-\frac{1}{2},j}} - v_{y_{i,j-\frac{1}{2}}} \right)$$

$$+ \frac{\Delta t}{h} \left(v_{x_{i-\frac{1}{2},j}} \left(f(S_{i-1,j}^n) - f(S_{ij}^n) \right) + v_{y_{i,j-\frac{1}{2}}} \left(f(S_{i,j-1}^n) - f(S_{ij}^n) \right) \right)$$

Equação de Advecção Não-Linear 2D

- Lembrando a condição de incompressibilidade do campo \mathbf{v}

$$S_{ij}^{n+1} = S_{ij}^n + \frac{\Delta t}{h} \left(v_{x_{i-\frac{1}{2},j}} \left(f(S_{i-1,j}^n) - f(S_{ij}^n) \right) + v_{y_{i,j-\frac{1}{2}}} \left(f(S_{i,j-1}^n) - f(S_{ij}^n) \right) \right)$$

Apenas as componentes com
fluxo entrando na célula ij
contribuem

Equação de Advecção Não-Linear 2D

- A partir daqui o argumento prossegue como no caso unidimensional

$$\begin{aligned} S_{ij}^{n+1} &= S_{ij}^n + \frac{\Delta t}{h} \left(v_{x_{i-\frac{1}{2},j}} \left(f(S_{i-1,j}^n) - f(S_{ij}^n) \right) + v_{y_{i,j-\frac{1}{2}}} \left(f(S_{i,j-1}^n) - f(S_{ij}^n) \right) \right) = \\ &= S_{ij}^n + \frac{\Delta t}{h} v_{x_{i-\frac{1}{2},j}} f'(\bar{S}_{i-\frac{1}{2},j}^n) (S_{i-1,j}^n - S_{ij}^n) + \frac{\Delta t}{h} v_{y_{i,j-\frac{1}{2}}} f'(\bar{S}_{i,j-\frac{1}{2}}^n) (S_{i,j-1}^n - S_{ij}^n) = \\ &= \left(1 - c_{i-\frac{1}{2},j}^n - c_{i,j-\frac{1}{2}}^n \right) S_{ij}^n + c_{i-\frac{1}{2},j}^n S_{i-1,j}^n + c_{i,j-\frac{1}{2}}^n S_{i,j-1}^n \end{aligned}$$

$$c_{i-\frac{1}{2},j}^n = \frac{\Delta t}{h} v_{x_{i-\frac{1}{2},j}} f'(\bar{S}_{i-\frac{1}{2},j}^n), \quad c_{i,j-\frac{1}{2}}^n = \frac{\Delta t}{h} v_{y_{i,j-\frac{1}{2}}} f'(\bar{S}_{i,j-\frac{1}{2}}^n)$$

Equação de Advecção Não-Linear 2D

- Definindo

$$\bar{c}_{i-\frac{1}{2},j}^n = \frac{\Delta t}{h} v_{x_{i-\frac{1}{2},j}} \sup_{S \in [S_{i-1,j}^n, S_{ij}^n]} f'(S), \quad \bar{c}_{i,j-\frac{1}{2}}^n = \frac{\Delta t}{h} v_{y_{i,j-\frac{1}{2}}} \sup_{S \in [S_{ij}^n, S_{i,j-1}^n]} f'(S)$$

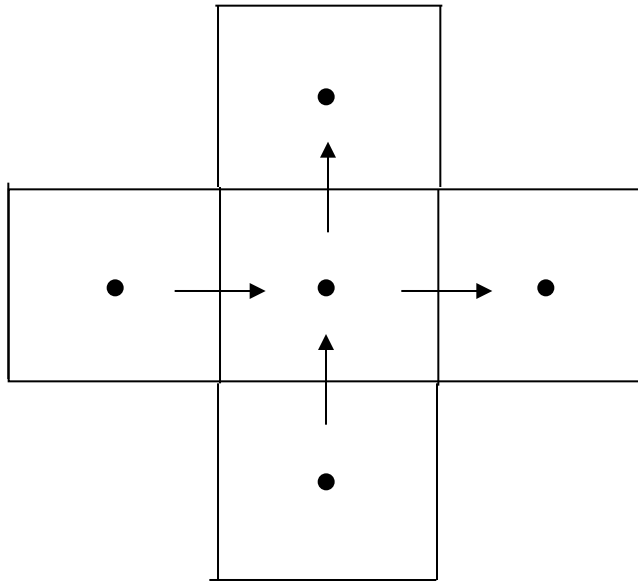
vale um princípio de máximo para

$$\bar{c}_{i-\frac{1}{2},j}^n + \bar{c}_{i,j-\frac{1}{2}}^n \leq 1 \text{ (condição de CFL)}$$

- Como generalizar para um padrão qualquer de velocidades?

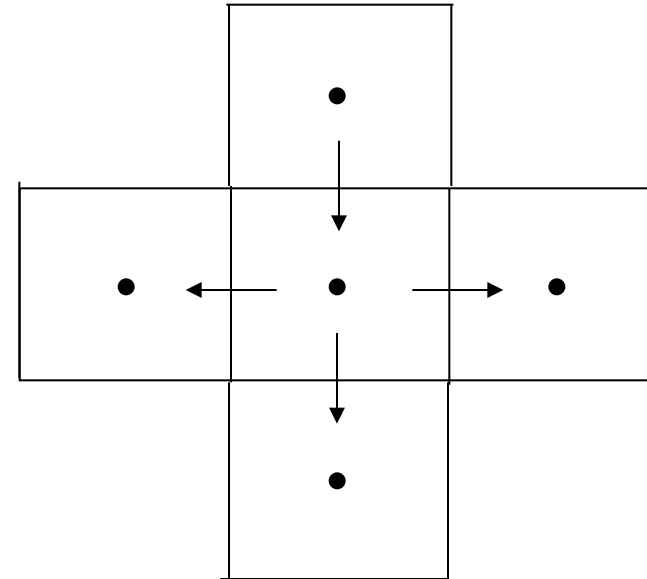
F_{ij}^+ = conjunto dos índices das faces onde a direção de fluxo é para fora do bloco

F_{ij}^- = conjunto dos índices das faces onde a direção de fluxo é para dentro do bloco



$$F_{ij}^+ = \left\{ i + \frac{1}{2}, j; i, j + \frac{1}{2} \right\}$$

$$F_{ij}^- = \left\{ i - \frac{1}{2}, j; i, j - \frac{1}{2} \right\}$$



$$F_{ij}^+ = \left\{ i - \frac{1}{2}, j; i + \frac{1}{2}, j; i, j + \frac{1}{2} \right\}$$

$$F_{ij}^- = \left\{ i, j - \frac{1}{2} \right\}$$

$$S_{ij}^{n+1} = S_{ij}^n - \frac{\Delta t}{h} \sum_{\sigma \in F_{ij}^+} |v_\sigma| f(S_{ij}^n) + \frac{\Delta t}{h} \sum_{\sigma \in F_{ij}^-} |v_\sigma| f(S_\sigma^n)$$

- A notação é mais ou menos óbvia, mas relativamente complexa para formalizar

$$v_\sigma = \begin{cases} v_{x_\sigma}, & \text{se } \sigma = i + \frac{1}{2}, j \text{ ou } \sigma = i - \frac{1}{2}, j \\ v_{y_\sigma}, & \text{se } \sigma = i, j + \frac{1}{2} \text{ ou } \sigma = i, j - \frac{1}{2} \end{cases}$$

Para cada face σ seja $B_\sigma = \{ij; \alpha\beta\}$
o conjunto de índices dos blocos
associados a face σ

Ex.: $\sigma = i + \frac{1}{2}, j, B_\sigma = \{ij; i+1, j\}$

Dada uma face σ com

$$B_\sigma = \{ij; \alpha\beta\}, S_\sigma^n = S_{\alpha\beta}^n$$

Ex.: $\sigma = i + \frac{1}{2}, j, S_\sigma^n = S_{i+1, j}^n$

Dada uma face σ

com $B_\sigma = \{ij; \alpha\beta\}, I_\sigma^n = [S_{ij}^n, S_{\alpha\beta}^n]$

$$S_{ij}^{n+1} = S_{ij}^n - \frac{\Delta t}{h} \sum_{\sigma \in F_{ij}^+} |v_\sigma| f(S_{ij}^n) + \frac{\Delta t}{h} \sum_{\sigma \in F_{ij}^-} |v_\sigma| f(S_\sigma^n)$$

⇓

$$S_{ij}^{n+1} = S_{ij}^n - \frac{\Delta t}{h} \sum_{\sigma \in F_{ij}^+} |v_\sigma| f(S_{ij}^n) + \frac{\Delta t}{h} \sum_{\sigma \in F_{ij}^-} |v_\sigma| f(S_{ij}^n)$$

$$- \frac{\Delta t}{h} \sum_{\sigma \in F_{ij}^-} |v_\sigma| f(S_{ij}^n) + \frac{\Delta t}{h} \sum_{\sigma \in F_{ij}^-} |v_\sigma| f(S_\sigma^n)$$

⇓

$$S_{ij}^{n+1} = S_{ij}^n - \frac{\Delta t}{h} \left(\sum_{\sigma \in F_{ij}^+} |v_\sigma| - \sum_{\sigma \in F_{ij}^-} |v_\sigma| \right) f(S_{ij}^n) + \frac{\Delta t}{h} \sum_{\sigma \in F_{ij}^-} |v_\sigma| (f(S_\sigma^n) - f(S_{ij}^n))$$

= 0 pela condição de incompressibilidade

Equação de Advecção Não-Linear 2D

$$\begin{aligned} S_{ij}^{n+1} &= S_{ij}^n + \frac{\Delta t}{h} \sum_{\sigma \in F_{ij}^-} |v_\sigma| \left(f(S_\sigma^n) - f(S_{ij}^n) \right) = \\ &= S_{ij}^n + \frac{\Delta t}{h} \sum_{\sigma \in F_{ij}^-} |v_\sigma| f'(\bar{S}_\sigma^n) (S_\sigma^n - S_{ij}^n) \end{aligned}$$

Apenas as componentes com fluxo entrando na célula ij contribuem

- Definindo $c_\sigma^n = \frac{\Delta t}{h} |v_\sigma| f'(\bar{S}_\sigma^n)$

$$S_{ij}^{n+1} = S_{ij}^n + \sum_{\sigma \in F_{ij}^-} c_\sigma^n (S_\sigma^n - S_{ij}^n) = \left(1 - \sum_{\sigma \in F_{ij}^-} c_\sigma^n \right) S_{ij}^n + \sum_{\sigma \in F_{ij}^-} c_\sigma^n S_\sigma^n$$

- A partir daqui o argumento prossegue como anteriormente

$$\text{Definindo } \bar{c}_\sigma^n = \frac{\Delta t}{h} |v_\sigma| \sup_{S \in I_\sigma^n} f'(S)$$

Vale um princípio de máximo para

$$\sum_{\sigma \in F_{ij}^-} \bar{c}_\sigma^n \leq 1 \text{ (condição de CFL)}$$

- Esquemas implícitos podem ser generalizados para casos multidimensionais

$$h^2 \frac{S_{ij}^{n+1} - S_{ij}^n}{\Delta t} + h \left(v_{x_{i+\frac{1}{2},j}} f(S_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1}) - v_{x_{i-\frac{1}{2},j}} f(S_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1}) \right) +$$

$$h \left(v_{y_{i,j+\frac{1}{2}}} f(S_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1}) - v_{y_{i,j-\frac{1}{2}}} f(S_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1}) \right) = 0$$

⇓

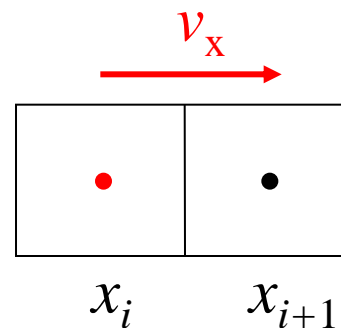
$$S_{ij}^{n+1} + \frac{\Delta t}{h} \left(v_{x_{i+\frac{1}{2},j}} f(S_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1}) - v_{x_{i-\frac{1}{2},j}} f(S_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1}) + \right.$$

$$\left. v_{y_{i,j+\frac{1}{2}}} f(S_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1}) - v_{y_{i,j-\frac{1}{2}}} f(S_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1}) \right) = S_{ij}^n$$

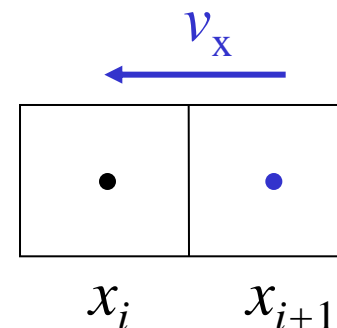
Equação de Advecção Não-Linear 2D

- Avaliação à montante da saturação na interface

$$S_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} = \begin{cases} S_{ij}^{n+1}, & \text{se } v_{x_{i+\frac{1}{2},j}} \geq 0 \\ S_{i+1,j}^{n+1}, & \text{se } v_{x_{i+\frac{1}{2},j}} < 0 \end{cases}$$



$$S_{i+\frac{1}{2},j}^n = S_{ij}^n$$



$$S_{i+\frac{1}{2},j}^n = S_{i+1,j}^n$$

Equação de Advecção Não-Linear 2D

- Requer a resolução de um sistema de equações algébricas não-lineares
- O método de Newton pode ser empregado
- A estabilidade pode ser analisada de forma semelhante ao caso linear, mostrando que o método implícito tem estabilidade incondicional
- Como o método de Newton tem convergência local, pode acontecer do método não convergir para passos de tempo muito grandes
- Neste caso, o passo de tempo é feito com um incremento menor

Equação de Advecção Não-Linear 2D

- Para problemas multidimensionais, a dispersão numérica, além da suavização de frentes, introduz um deslocamento preferencial nas direções alinhadas com a malha, conhecido como efeito de orientação de malha
- Para algumas situações (p.ex. deslocamento miscível) esse problema pode ser particularmente grave

Equação de Advecção Não-Linear 2D

- Esquemas de nove pontos (incluindo os vizinhos na direção diagonal) foram propostos de forma a gerar uma dispersão numérica mais isotrópica, atenuando parcialmente este efeito
- Outras possíveis soluções são esquemas de alta ordem e uso de malhas não-estruturadas ou seguindo as linhas de fluxo

Escoamento Bifásico

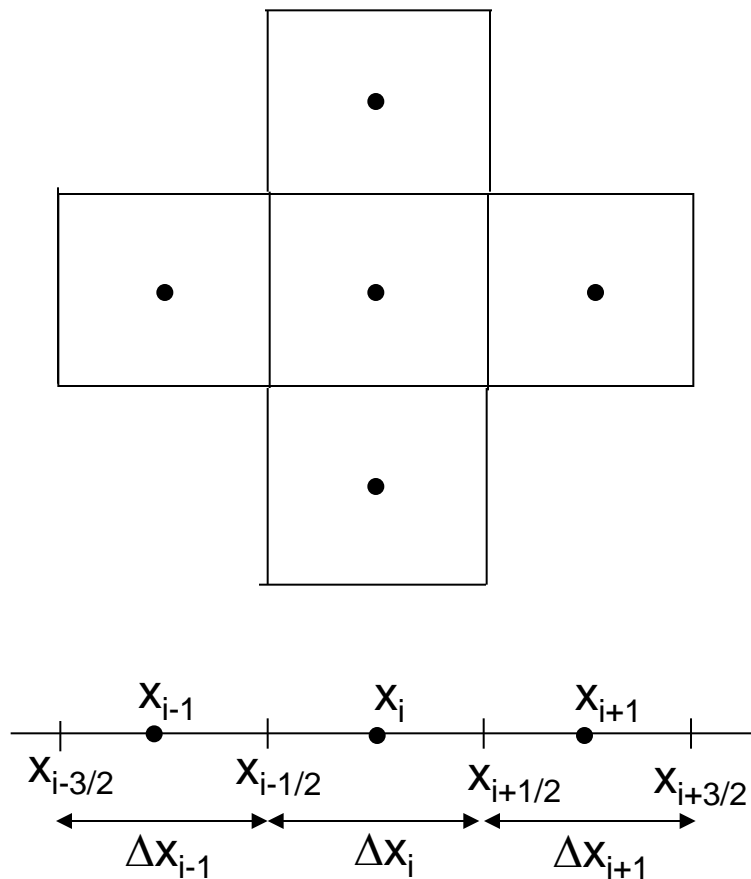
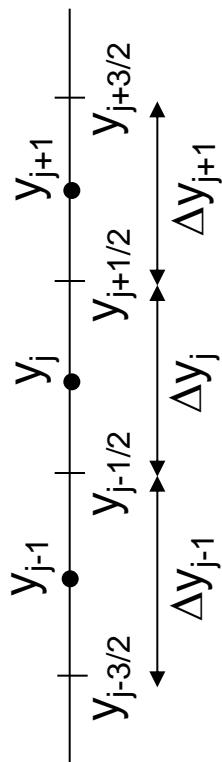
- Equações a serem resolvidas

$$\frac{\partial(\phi\rho_w S_w)}{\partial t} - \nabla \cdot (\rho_w \mathbf{K} \lambda_w (\nabla p_o + \rho_w \mathbf{g} - \nabla P_c)) - (\rho_w q_w) = 0$$

$$\frac{\partial(\phi\rho_o S_o)}{\partial t} - \nabla \cdot (\rho_o \mathbf{K} \lambda_o (\nabla p_o + \rho_o \mathbf{g})) - (\rho_o q_o) = 0$$

- Na equação acima assumimos:
 - $\mathbf{K} = \mathbf{K}(\mathbf{x})$ é um tensor diagonal
 - $\rho_f = \rho_f(p_o)$, $\mu_f = \mu_f(p_o)$, $f = w, o$, e $\phi = \phi(p_o)$
 - $k_{rf} = k_{rf}(S_w)$, $f = w, o$, e $P_c = P_c(S_w)$
- Ainda se aplica a relação $S_w + S_o = 1$

- Para fixar ideias, consideraremos a situação bidimensional
- Recordando a notação de células e nós:



- Para obter a discretização, integram-se as equações de fluxo na célula centrada em (x_i, y_j) , como anteriormente
- Para a derivada temporal, obtém-se

$$\int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \frac{\partial (\phi \rho_f S_f)}{\partial t} \approx \Delta x_i \Delta y_j \frac{(\phi \rho_f S_f)^{n+1} - (\phi \rho_f S_f)^n}{\Delta t} =$$

$$= \frac{M_{fij}^{n+1} - M_{fij}^n}{\Delta t}, \quad f = w, o$$

- Termo de acumulação: variação de massa do componente f na célula ij
- O termo de acumulação é não-linear, devido à dependência de ϕ e ρ na pressão

Escoamento Bifásico

- Para os termos de fluxo, considere o termo na direção X (os demais são semelhantes):

$$\int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho_f \lambda_f k_x \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \rho_f \frac{\partial z}{\partial x} - \alpha_f \frac{\partial P_c}{\partial x} \right) \right) dx dy =$$

$$\int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \left[\rho_f \lambda_f k_x \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \rho_f \frac{\partial z}{\partial x} - \alpha_f \frac{\partial P_c}{\partial x} \right) \right]_{(x,y)=\left(x_{i+\frac{1}{2}}, y\right)} dy -$$

$$\int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \left[\rho_f \lambda_f k_x \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \rho_f \frac{\partial z}{\partial x} - \alpha_f \frac{\partial P_c}{\partial x} \right) \right]_{(x,y)=\left(x_{i-\frac{1}{2}}, y\right)} dy,$$

$$f = w, o, \alpha_w = 1, \alpha_o = 0$$

Escoamento Bifásico

- As aproximações para a permeabilidade e a mobilidade são feitas de forma diferente
 - Para permeabilidade, média harmônica
 - Para a mobilidade, tratamento a montante
- De acordo com a discussão dos problemas modelo, a pressão deve ser tratada implicitamente e a saturação pode ser tratada implícita ou explicitamente

- Para a face $(x_{i+1/2}, y_j)$:

$$\int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \left[\rho_f \lambda_f k_x \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \rho_f \frac{\partial z}{\partial x} - \alpha_f \frac{\partial P_c}{\partial x} \right) \right]_{(x,y)=\left(x_{i+\frac{1}{2}}, y\right)} dy \approx$$

$$\left(\rho_f \lambda_f \right)_{i+\frac{1}{2},j}^m T_{i+\frac{1}{2},j} \left(p_{i+1,j}^{n+1} - p_{ij}^{n+1} + \rho_{f_{i+\frac{1}{2},j}}^m \left(z_{i+1,j} - z_{ij} \right) - \alpha_f \left(P_{c_{i+1,j}}^m - P_{c_{ij}}^m \right) \right) = \left(\rho_f \lambda_f \right)_{i+\frac{1}{2},j}^m T_{i+\frac{1}{2},j} \Delta \Phi_{ij}^{\bar{m}}$$

- Para $m = n + 1$, temos o método totalmente implícito (FIM – “fully implicit method”)
- Para $m = n$, temos o método IMPES (IMplícito na Pressão Explícito na Saturação)

Escoamento Bifásico

$$T_{i+1/2,j} = \frac{2\Delta y_j k_{x_{ij}} k_{x_{i+1,j}}}{\Delta x_i k_{x_{i+1,j}} + \Delta x_{i+1} k_{x_{ij}}}$$

Transmissibilidade na direção X
(depende da geometria da malha e da permeabilidade do meio, exatamente como no caso monofásico)

$$\rho_{f_{i+1/2,j}}^m = \frac{\Delta x_i \rho_{f_{ij}}^m + \Delta x_{i+1} \rho_{f_{i+1,j}}^m}{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}}$$

Aproximação para a densidade no termo gravitacional por interpolação linear:

Aproximação a montante para a mobilidade:

$$\left(\rho_f \lambda_f\right)_{i+1/2,j}^m = \begin{cases} \rho_f(p_{i+1,j}^m) \lambda_f(p_{i+1,j}^m, S_{i+1,j}^m), & \text{se } \Delta\Phi_{ij}^{\bar{m}} \geq 0 \\ \rho_f(p_{ij}^m) \lambda_f(p_{ij}^m, S_{ij}^m), & \text{se } \Delta\Phi_{ij}^{\bar{m}} < 0 \end{cases}$$

Escoamento Bifásico

- Outras alternativas são possíveis, por exemplo :
 - ✓ Interpolar linearmente a pressão e tratar à montante apenas a saturação
 - ✓ Tratar implicitamente todas as dependências da pressão
 - ✓ Etc...
- Essa discretização resulta em um conjunto de equações algébricas não-lineares tanto para FIM como IMPES
- O método de Newton é usualmente empregado

- Conjunto de equações algébricas não-lineares (N é o número de células da malha, BM abrevia balanço de massa):

$$\mathbf{F}: \mathbb{R}^{2N} \rightarrow \mathbb{R}^{2N}$$

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{F}(\mathbf{x})$$

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1^{n+1} \\ S_1^{n+1} \\ \vdots \\ p_N^{n+1} \\ S_N^{n+1} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{o_1}^{n+1}(p_1^{n+1}, S_1^{n+1}, \dots, p_N^{n+1}, S_N^{n+1}) \\ f_{w_1}^{n+1}(p_1^{n+1}, S_1^{n+1}, \dots, p_N^{n+1}, S_N^{n+1}) \\ \vdots \\ f_{o_N}^{n+1}(p_1^{n+1}, S_1^{n+1}, \dots, p_N^{n+1}, S_N^{n+1}) \\ f_{w_N}^{n+1}(p_1^{n+1}, S_1^{n+1}, \dots, p_N^{n+1}, S_N^{n+1}) \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

BM óleo – célula 1

BM água – célula 1

BM óleo – célula N

BM água – célula N

- Recordando o método de Newton:

Para $k = 1, \dots$, até convergir faça

$$\begin{cases} \mathbf{J}(\mathbf{x}^k) \Delta \mathbf{x}^k = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^k) \\ \mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \Delta \mathbf{x}^k \end{cases}$$

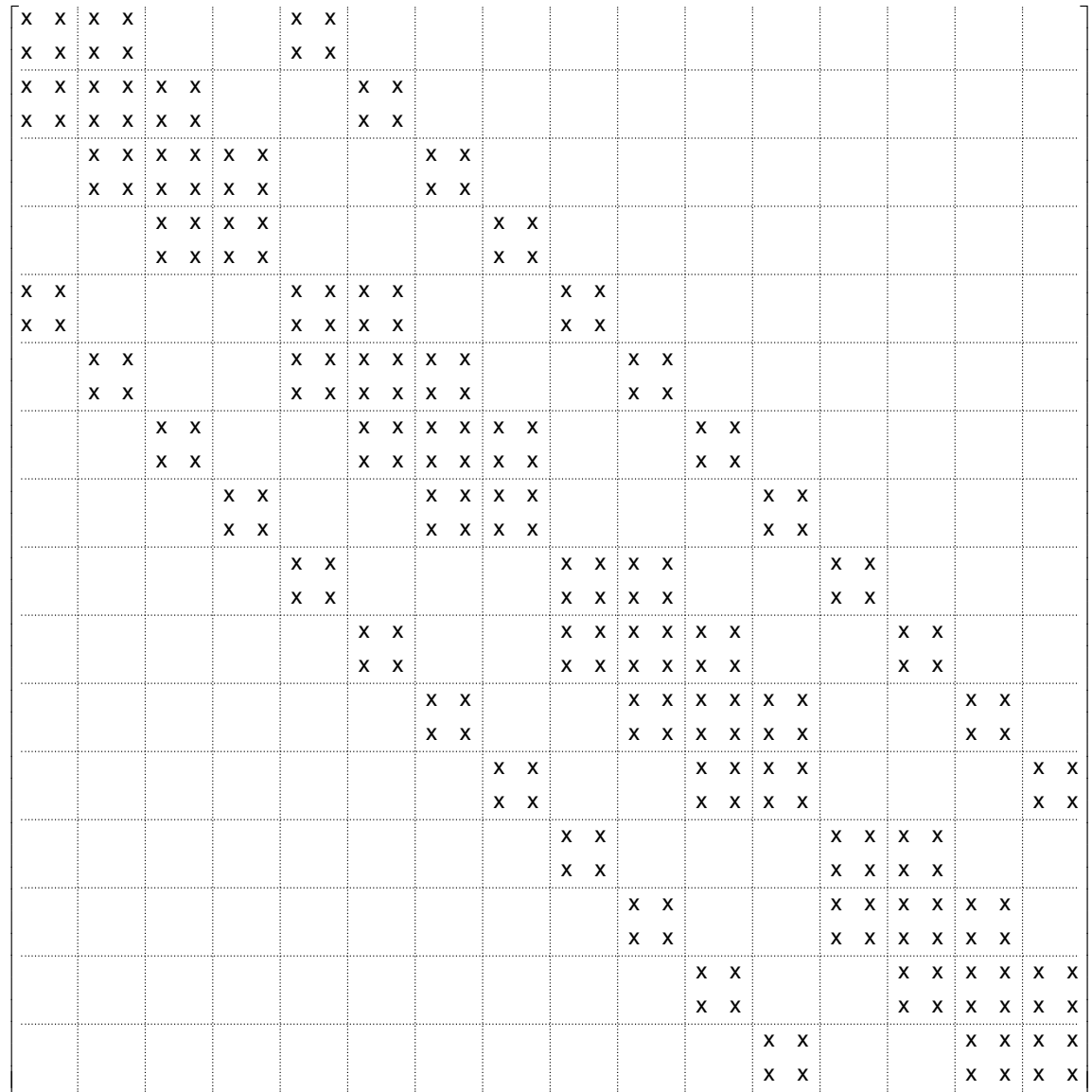
$$\begin{bmatrix} \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial f_{o_1}^{n+1,k}}{\partial p_1^{n+1,k}} & \frac{\partial f_{o_1}^{n+1,k}}{\partial S_1^{n+1,k}} \\ \frac{\partial f_{w_1}^{n+1,k}}{\partial p_1^{n+1,k}} & \frac{\partial f_{w_1}^{n+1,k}}{\partial S_1^{n+1,k}} \end{array} \right] & \dots & \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial f_{o_1}^{n+1,k}}{\partial p_N^{n+1,k}} & \frac{\partial f_{o_1}^{n+1,k}}{\partial S_N^{n+1,k}} \\ \frac{\partial f_{w_1}^{n+1,k}}{\partial p_N^{n+1,k}} & \frac{\partial f_{w_1}^{n+1,k}}{\partial S_N^{n+1,k}} \end{array} \right] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial f_{o_N}^{n+1,k}}{\partial p_1^{n+1,k}} & \frac{\partial f_{o_N}^{n+1,k}}{\partial S_1^{n+1,k}} \\ \frac{\partial f_{w_N}^{n+1,k}}{\partial p_1^{n+1,k}} & \frac{\partial f_{w_N}^{n+1,k}}{\partial S_1^{n+1,k}} \end{array} \right] & \dots & \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial f_{o_N}^{n+1,k}}{\partial p_N^{n+1,k}} & \frac{\partial f_{o_N}^{n+1,k}}{\partial S_N^{n+1,k}} \\ \frac{\partial f_{w_N}^{n+1,k}}{\partial p_N^{n+1,k}} & \frac{\partial f_{w_N}^{n+1,k}}{\partial S_N^{n+1,k}} \end{array} \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta p_1^{n+1,k} \\ \Delta S_1^{n+1,k} \\ \vdots \\ \Delta p_N^{n+1,k} \\ \Delta S_N^{n+1,k} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} f_{o_1}^{n+1}(p_1^{n+1,k}, S_1^{n+1,k}, \dots, p_N^{n+1,k}, S_N^{n+1,k}) \\ f_{w_1}^{n+1}(p_1^{n+1,k}, S_1^{n+1,k}, \dots, p_N^{n+1,k}, S_N^{n+1,k}) \\ \vdots \\ f_{o_N}^{n+1}(p_1^{n+1,k}, S_1^{n+1,k}, \dots, p_N^{n+1,k}, S_N^{n+1,k}) \\ f_{w_N}^{n+1}(p_1^{n+1,k}, S_1^{n+1,k}, \dots, p_N^{n+1,k}, S_N^{n+1,k}) \end{bmatrix}$$

Jacobiano de \mathbf{F}

Escoamento Bifásico

- O jacobiano é uma matriz esparsa, já que, em cada equação de balanço, contribuem apenas as células vizinhas, como no caso monofásico
- Para o problema bifásico, no entanto, temos duas equações e duas incógnitas por célula de forma que aparece uma estrutura por blocos 2×2
- A estrutura do jacobiano para os métodos FIM e IMPES é diferente e determinante na resolução do problema e no custo por iteração do método de Newton

| | | | |
|----|----|----|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 |
| 9 | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 14 | 15 | 16 |



Matriz ordenada
célula a célula p e S
intercaladas

Matriz pentadiagonal por blocos 2 x 2

Escoamento Bifásico

- Os métodos diretos e iterativos discutidos no caso monofásico têm extensões imediatas para este caso, bastando substituir as operações escalares por operações matriciais atuando nos sub-blocos 2×2
- Duas observações:
 - ✓ Operações de divisão são substituídas pelo produto pela inversa
 - ✓ Na multiplicação de matrizes a ordem é relevante

Escoamento Bifásico

- A eficiência é ainda mais crítica, já que multiplicar ou inverter matrizes densas de ordem p tem custo proporcional a p^3 , ou seja, para o problema bifásico uma estimativa grosseira indica que o custo dos algoritmos de resolução seja em torno de oito vezes maior em relação ao caso monofásico
- Para problemas trifásicos ou composicionais o número de incógnitas e equações por célula da malha aumenta e o custo se torna ainda mais elevado

Escoamento Bifásico

- Para o IMPES, uma bloco-linha do Jacobiano tem a estrutura abaixo (assumindo numeração natural para as células da malha)

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 i, j-1 & \cdots & i-1, j & ij & i+1, j & \cdots & i, j+1 & & & & & \\
 p & S & \cdots & p & S & p & S & p & S & \cdots & p & S \\
 \hline
 \begin{bmatrix} x & 0 \\ x & 0 \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} x & 0 \\ x & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} x & x \\ x & x \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} x & 0 \\ x & 0 \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} x & 0 \\ x & 0 \end{bmatrix} & & & & &
 \end{array}$$

- A saturação e a pressão são acopladas apenas pela diagonal principal

Escoamento Bifásico

- Multiplicando pela inversa do bloco na diagonal desacopla a pressão da saturação: a equação alinhada com a pressão só depende de valores de pressão, enquanto a saturação não depende das saturações em células vizinhas (apenas das pressões)

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 i, j-1 & \cdots & i-1, j & ij & i+1, j & \cdots & i, j+1 & & & & & \\
 p & S & \cdots & p & S & p & S & p & S & \cdots & p & S \\
 \hline
 \begin{bmatrix} x & 0 \\ x & 0 \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} x & 0 \\ x & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} x & 0 \\ x & 0 \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} x & 0 \\ x & 0 \end{bmatrix} & & & & &
 \end{array}$$

Escoamento Bifásico

- O sistema linear a ser resolvido em cada iteração do método de Newton para método IMPES pode ser escrito como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J}_{op} & \mathbf{0} \\ \mathbf{J}_{wp} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_p \\ \Delta \mathbf{x}_S \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{F}_o \\ \mathbf{F}_w \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{J}_{op} \Delta \mathbf{x}_p = -\mathbf{F}_o$$

$$\Delta \mathbf{x}_S = -\mathbf{F}_w - \mathbf{J}_{wp} \Delta \mathbf{x}_p$$

Escoamento Bifásico

- Note que \mathbf{J}_{op} , \mathbf{J}_{wp} , \mathbf{F}_o , \mathbf{F}_w não são as matrizes originais do Jacobiano, mas as transformadas pela multiplicação pela inversa dos blocos da diagonal principal

Escoamento Bifásico

- O método IMPES envolve duas etapas:
 - ✓ Resolução da pressão
 - ✓ Obtenção da saturação utilizando as pressões calculadas na etapa anterior
- A resolução da pressão envolve a resolução de um sistema com estrutura exatamente igual ao problema monofásico
- A obtenção da saturação não envolve a resolução de nenhum sistema, já que a saturação depende apenas das pressões e não das saturações nas células vizinhas

Escoamento Bifásico

- O custo de uma iteração do método IMPES é da mesma ordem que o problema monofásico
- Como a não-linearidade do método IMPES se apresenta apenas no termo de acumulação, tipicamente a convergência do IMPES é mais rápida que para o FIM
- O passo de tempo para o método IMPES, no entanto, está restrito por uma condição de CFL, que pode ser bastante severa em casos práticos, de forma que algum grau de implicitude na saturação é normalmente usado em simuladores de reservatório

Escoamento Bifásico

- Multiplicando pela inversa do bloco diagonal mostra que a pressão está acoplada com as demais pressões e as saturações implícitas

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 i, j-1 & \cdots & i-1, j & ij & i+1, j & \cdots & i, j+1 & & & & & \\
 p & S & \cdots & p & S & p & S & p & S & \cdots & p & S \\
 \hline
 \begin{bmatrix} x & 0 \\ x & 0 \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} x & x \\ x & x \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} x & 0 \\ x & 0 \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} x & x \\ x & x \end{bmatrix} & & & & &
 \end{array}$$

- O sistema linear a ser resolvido em cada iteração do método de Newton para método AIM pode ser escrito como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J}_{ii} & \mathbf{0} \\ \mathbf{J}_{ei} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_i \\ \Delta \mathbf{x}_e \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{F}_i \\ \mathbf{F}_e \end{bmatrix}$$



$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{ii} \Delta \mathbf{x}_i &= -\mathbf{F}_i \\ \Delta \mathbf{x}_e &= -\mathbf{F}_e - \mathbf{J}_{ei} \Delta \mathbf{x}_e \end{aligned}$$

- Quando todas as células são tratadas explicitamente este é o mesmo sistema do método IMPES

Escoamento Bifásico

- Note que \mathbf{J}_{ii} , \mathbf{J}_{ie} , \mathbf{F}_i , \mathbf{F}_e não são as matrizes originais do Jacobiano, mas as transformadas pela multiplicação pela inversa dos blocos da diagonal principal
- A escolha das células explícitas e implícitas é feita dinamicamente em critérios baseados em análise de estabilidade tipo CFL e/ou na variação de saturação no passo anterior